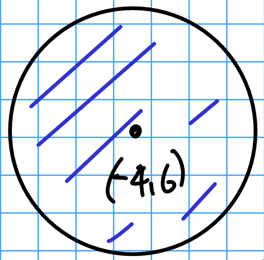
Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 12, 23 ottobre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

Per concludere l'es. della volta scorsa:



se sono $(x \quad y) = (4 + \overbrace{\cos\theta}^{h},\ 6 + \overbrace{\sin\theta}^{k})$

$\dashrightarrow \quad \tan(2\theta) = \cancel{2}\ 1$

$$\parallel$$

$$\frac{\cancel{2}\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin\theta}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\overset{\parallel}{h\,k}}{h^2 - k^2} = 1 \\ h^2 + k^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} hk = h^2 - k^2 \\ k = \pm\sqrt{1 - h^2} \end{cases} \iff \pm h\sqrt{1-h^2} = 2h^2 - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$(\quad h^2 - h^4 =) h^2(1-h^2) = 4h^4 - 4h^2 + 1$$

$$5h^4 - 5h^2 + 1 = 0$$

$$h^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{10} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$$

$$\begin{cases} h = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}} \\ k = \pm\sqrt{1-h^2} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{10}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{10}} \end{cases}$$

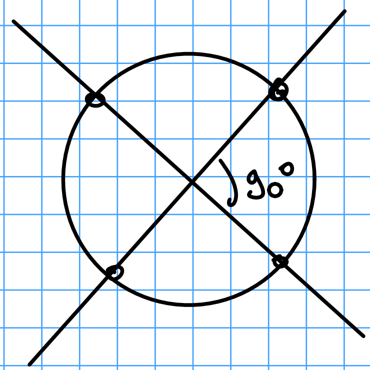
NON SO SE + o −

USIAMO L'ALTRA EQUAZIONE

$$hk = h^2 - k^2 = 2h^2 - 1 \Rightarrow k = \frac{2h^2-1}{h}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}\right) - 1}{\pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}}} = \frac{\pm\frac{\sqrt{5}}{10}}{\pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}}}$$

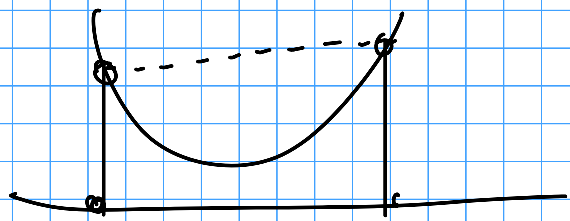
SI DOVREBBE TROVARE CHE



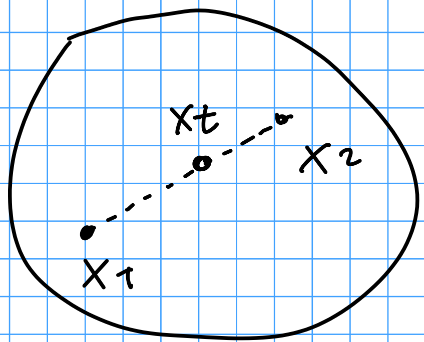
(RAGIONANDO IN Q è CHIARO)

CONVESSITÀ IN PIÙ VARIABILI

DEF. UN INSIEME $K \subset \mathbb{R}^N$ si DICE CONVESSO QUANDO:

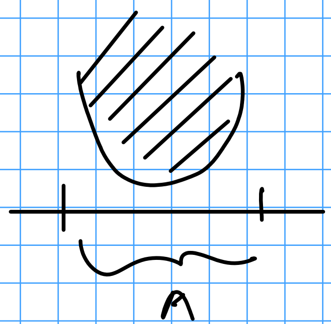


$$X_1, X_2 \in K, \quad t \in [0,1] \Rightarrow \underbrace{t X_1 + (1-t) X_2}_{X_t} \in K$$



DATA $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}^N$), chiamo EPIGRAFICO

L'INSIEME IN $\mathbb{R}^{N+1}$ $\quad epi(f) : \{ (X, y) : X \in A, \; y \geq f(x) \}$



SE K CONVESSO E $f : K \to \mathbb{R}$ dico che f è

CONVESSA se e solo se $epi(f)$ È CONVESSO (IN $\mathbb{R}^{N+1}$)

$\iff \forall\, x_1, x_2 \in K \quad \forall\, t \in [0,1]$

$$f(t x_1 + (1-t) x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$

PROPRIETÀ

- f CONVESSA $\Rightarrow$ f CONTINUA IN $\mathring{K}$

  ($\mathring{K}$ = PARTE INTERNA DI K)

- SUPPONIAMO K aperto e f differenziabile in K.
  Allora sono equivalenti

  (a) f CONVESSA

  (b) $x \mapsto \nabla f(x)$ È "MONOTONO" CIOÈ

  Dati x_1 e x_2 si ha:

  $$(\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)) \cdot (x_1 - x_2) \geq 0$$

  (c) $\forall\, x_0 \ \forall\, x$ in K si ha:

  $$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$$

(f è sempre "sopra il piano tangente")

- Se K è aperto e f è differenziabile DUE VOLTE,

$$f \text{ convessa} \iff H_f(x) \geq 0 \quad \forall x \in K$$

(tutti gli autovalori ≥ 0)

FATTO Sia f è convessa su K aperto, f differenziabile.

Allora $\nabla f(x_0) = 0 \iff x_0$ MINIMO ASSOLUTO

(segue dalla C di prima)

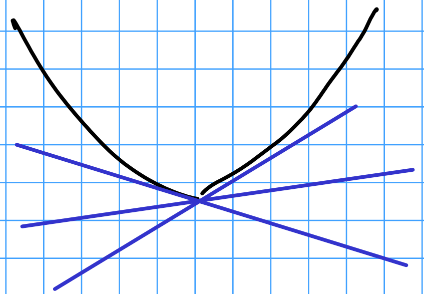
GENERALIZZAZIONE (della (C) di prima)

Se $f : K \to \mathbb{R}$ è convessa allora $\forall x_0 \in \overset{\circ}{K}$ esiste un vettore w (che si può chiamare "sottogradiente" di f in x_0) tale che

$$f(x) \geq f(x_0) + w \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in K$$

Se di tali ω ce n'è uno solo $\Rightarrow$

f è differenziabile in x_0 e $\omega = \nabla f(x_0)$



CONSIDERAZIONI UTILI IN PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

CURVE Chiamo curva in $\mathbb{R}^N$ una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$

dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$.

DICO γ è una curva chiusa se $I = [a,b]$ e

$\gamma(b) = \gamma(a)$

DICO che γ è semplice se $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

quando $t_1 \neq t_2$ (con l'eccezione di t_1, t_2 estremi di I)

CHIAMO sostegno di γ l'insieme

$$\gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\}$$

SPESSO SI DICE CHE γ è una parametrizzazione della curva (di $\gamma(I)$)

ESEMPI

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

è una curva chiusa, semplice, il cui sostegno è la circonferenza $S = \{x^2 + y^2 = 1\}$

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 4\pi$$

è (UN'ALTRA) curva chiusa, NON SEMPLICE

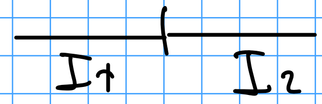
$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \; (= \gamma(-t)) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

è ancora chiusa e semplice (γ "PERCORSA A ROVESCIO")

TUTTE HANNO SOSTEGNO $= S$

DEF. Se I_1 e I_2 sono "consecutivi" cioè

$I_1 \ni \sup I_1 = \inf I_2 \in I_2 = c$



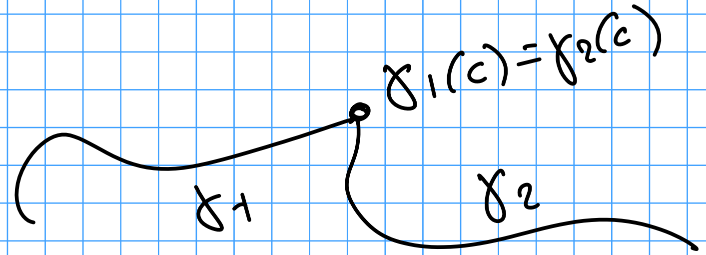
Se $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^N$, $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^N$ due curve CONTINUE

TALI CHE $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$)

posso definire $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ definita su $I = I_1 \cup I_2$

da $$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in I_1 \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in I_2 \end{cases}$$

γ è CONTINUA



(Se γ è chiusa voglio anche $\gamma'(b) = \gamma'(a)$)

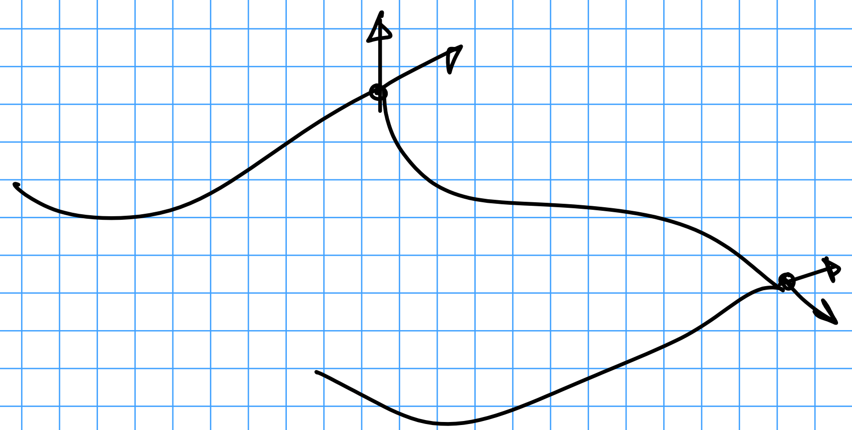
DEF. Dico che γ è "regolare" se γ è derivabile, γ' è continua, $\gamma' \neq 0$. IN QUESTO CASO per OGNI $t \in I$ è definita la retta tangente in $\gamma(t)$

(che è la curva $\gamma(t) + s\gamma'(t)$ $s \in \mathbb{R}$)

- Dico che è regolare a tratti se γ è <u>CONTINUA</u>

e $I = I_1 \cup I_2 \cup I_m$, I_i CONSECUTIVI tali che

la restrizione di γ a I_i è regolare, $i = 1 \ldots m$.



<u>FATTI</u> • Se $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^N$, $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^N$ sono semplici, regolari

con lo stesso sostegno S

Allora per ogni $P \in S$ posso considerare

$t_1 \in I_1$ $t_2 \in I_2$ per cui $\gamma_1(t_1) = P = \gamma_2(t_2)$

ALLORA LE RETTE TANGENTI IN P (cioè la tangente a γ_1 in $\gamma_1(t_1)$ e la tangente a γ_2 in $\gamma_2(t_2)$)

HANNO LO STESSO SOSTEGNO

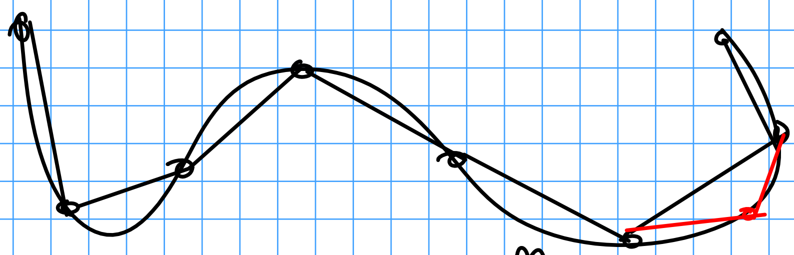
(IN EFFETTI SI DIMOSTRA CHE $\gamma_1'(t_1)$ e $\gamma_2'(t_2)$ sono uno multiplo dell'altro)

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Supponiamo (all'inizio) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sia una curva semplice

DATI $P_0 = \gamma(a)$, P_1 .. $P_m = \gamma(b)$ "consecutivi" su S

(cioè dati $a = t_0 < t_1 \ldots t_m = b$ $[a,b]$ con $\gamma(t_i) = P_i$)



e consideriamo $\sum_{i=1}^{m} \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \|$

IN QUESTO MODO, per ogni "SUDDIVISIONE" σ di $[a,b]$

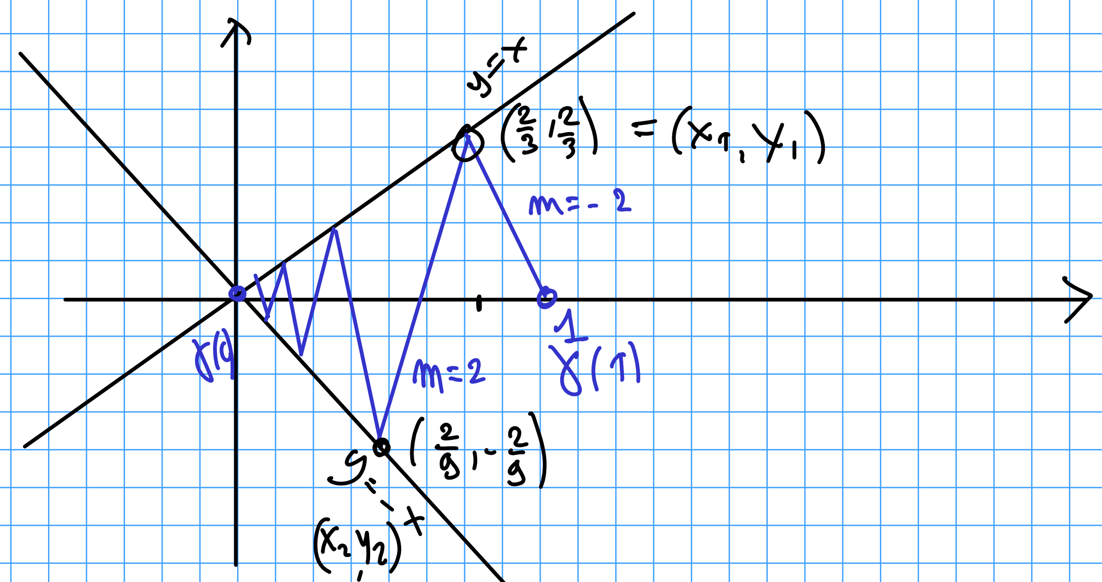
risulta definito $\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$

e se σ_2 è "più fine" di $\sigma_1 \Rightarrow \ell(\sigma_2) \geq \ell(\sigma_1)$

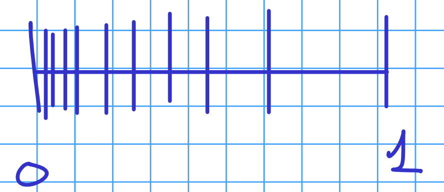
(σ_2 CONTIENE σ_1)

$\Rightarrow$ POSSO DEFINIRE $\ell(\gamma) = \sup_{\sigma} \ell(\sigma)$

QUESTO NUMERO PUÒ VENIRE ∞



SI RIESCE A PARAMETRIZZARLA SU $[0,1]$



VEDIAMO QUAL È LA LUNGHEZZA

IL PRIMO TRATTO: CONSIDERO LA RETTA PER $(1,0)$ di coeff. angolare -2 $\quad y=-2(x-1)$

LA INTERSECO CON $x=y$ $\quad x=-2x+2 \iff$

$x=\frac{2}{3}$ $\quad y=\frac{2}{3}$ $\quad$ SECONDO TRATTO DA $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ prendiamo la

retta di coeff. $m=2$, cioè $\quad y-\frac{2}{3}=2\left(x-\frac{2}{3}\right)$

e intersechiamola con $y=-x$ $\iff$

$-x-\frac{2}{3}=2x-\frac{4}{3} \iff 3x=\frac{2}{3} \iff x=\frac{2}{9} \quad \left(y=-\frac{2}{9}\right)$

TERZO TRATTO DA $\left(\frac{2}{9},-\frac{2}{9}\right)$ prendo la retta

$y+\frac{2}{9}=-2\left(x-\frac{2}{9}\right)$ $\quad$ e la interseco con $y=x$

$\Rightarrow \quad x+\frac{2}{9}=-2x+\frac{4}{9} \iff 3x=\frac{2}{9} \iff x=\frac{2}{27}$

$\vdots$ ITERANDO TROVO $\quad x_n=\frac{2}{3^n} \quad y_n=(-1)^{n+1}\frac{2}{3^n}$

QUANDO È LUNGO IL TRATTO DA (x_n, y_n) a $(x_{n+1}, y_{n+1}) \Longrightarrow$

$$\sqrt{(x_{n+1}-x_n)^2+(y_{n+1}-y_n)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2}{3^{n+1}}-\frac{2}{3^n}\right)^2+\left((-1)^{n+2}\frac{2}{3^{n+1}}\underbrace{-(-1)^{n+1}}_{+(-1)^{n+2}}\frac{2}{3^n}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2}{3^n}\right)^2\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{2}{3^n}\right)^2\left(\frac{1}{3}+1\right)^2}=$$

$$\frac{2}{3^n}\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{16}{9}}=\frac{2}{3^n}\frac{\sqrt{20}}{3}=\frac{A}{3^n}$$

$$\left(A=\frac{2}{3}\sqrt{20}\right)$$

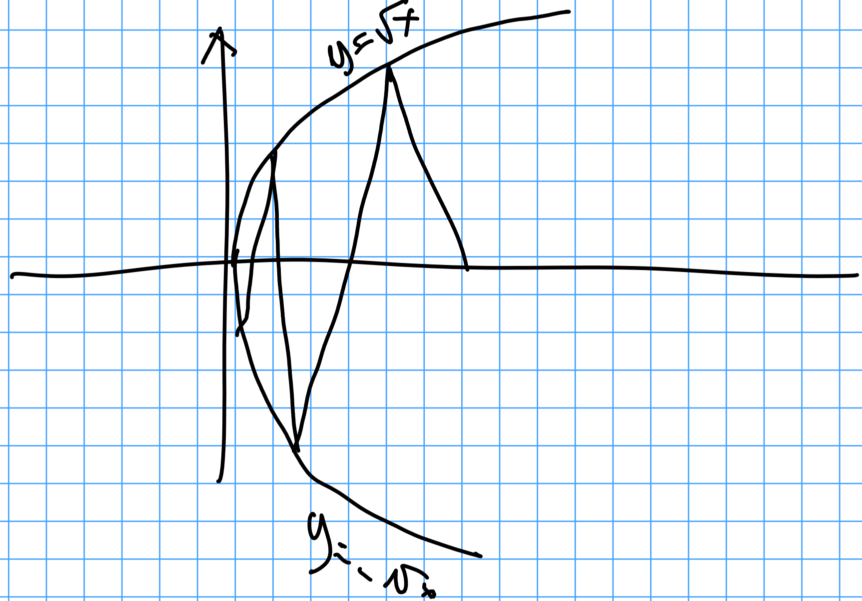
SI VEDE CHE $\ell(\gamma)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{3^n}+(\text{primo pezzo})$

$<+\infty$ per la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{1-1/3}-1<+\infty$

(RICORDO CHE $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n = \frac{1}{1-\gamma}$ per $|\gamma| < 1$)

SE INVECE DELLE DIAGONALI PRENDO

$\pm\sqrt{x}$



DOVREBBE VENIRE UNA CURVA DI LUNGHEZZA INFINITA

TEOREMA SE γ è regolare $\Rightarrow$

$\ell(\gamma) < +\infty$ e $\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt$

OSS. Se il teorema è vero $\Rightarrow$

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,dt$$

NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE