Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 11, 22 ottobre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

ESERCIZIO

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

CERCO IL $\underbrace{\text{MAX e IL MIN}}_{\text{DEVONO ESISTERE PER WEIERSTRASS}}$ DI f su $\overbrace{\overline{B(0,20)}}^{\overline{B}} = \{x^2+y^2 \le 400\}$.

Siano X_{min} e X_{MAX} dei punti di min/max per f su $\overline{B}$

per ognuno dei due ho due casi:

(1) $X_{min} \in B(0,20)$ (disco aperto) $\Rightarrow |\nabla f|(X_{min}) = 0$

(2) $X_{min} \in \partial B(0,2)$??

STESSA CASISTICA per X_{max}

CERCHIAMO ALLORA, PER PRIMA COSA, i pti critici dentro $B(0,20)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y - 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 8$$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = 0$ se e solo se $x = -4$ e $y = 6$

VEDO CHE $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \in B(0,20)$, lo devo considerare

• CALCOLIAMO H_f :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow H_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \underline{\text{SELLA}}$$

DUNQUE SIA x_{min} che x_{max} devono essere su $\partial B(0,20)$

PER STUDIARE f su $\partial B(0,1) = S(0,20) = \{x^2+y^2 = 400\}$

DESCRIVO $S(0,20)$ come $\left\{ \begin{pmatrix} 20\cos(\theta) \\ 20\sin(\theta) \end{pmatrix} ; 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$

e prendo $g(\theta) = f(20\cos\theta, 20\sin\theta)$ per $0 \leq \theta \leq 2\pi$

se trovo $\max\limits_{[0,2\pi]} g \,/\, \min\limits_{[0,2\pi]} g \Rightarrow$ trovo $\max\limits_{S(0,20)} f \,/\, \min\limits_{S(0,20)} f$

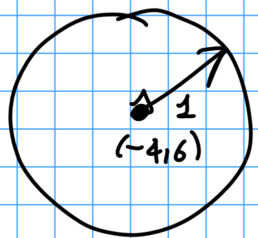
SI HA: $g(\theta) = 400\cos^2(\theta) + 800\sin(\theta)\cos(\theta) - 80\cos(\theta) + 160\sin\theta$

$= 80\left(5\cos^2(\theta) + 10\sin\theta\cos\theta - \cos(\theta) + 2\sin\theta\right) =$

NON SI RIESCE A FARE ANALITICAMENTE

VARIANTE: CERCO max / min di f su

$$\overline{B_1} = B\left(\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}, 1\right)$$



Introduco $g(\theta) = f(-4+\cos\theta,\ 6+\sin\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$

questo g descrive la restrizione di f a ∂B_1

$$g(\theta) = (-4+\cos\theta)^2 + 2(-4+\cos\theta)(6+\sin\theta) - 4(-4+\cos\theta) + 8(6+\sin\theta) =$$

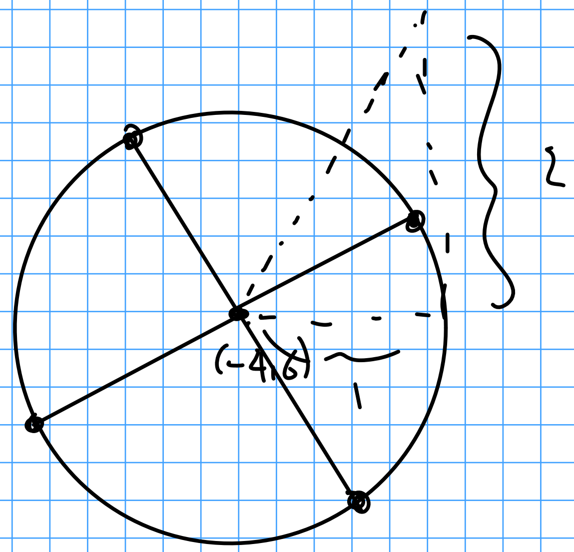
$$16 \cancel{- 8\cos\theta} + \cos^2\theta + 2(\cancel{-24} \cancel{- 4\sin\theta} \cancel{+ 6\cos\theta} + \sin\theta\cos\theta)$$
$$+16 \cancel{- 4\cos\theta} \cancel{+ 48} \cancel{+ 8\sin\theta} = 32 + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$32 + \frac{1+\cos(2\theta)}{2} + \sin(2\theta) = \frac{65}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \sin(2\theta)$$

$g'(\theta) = -\sin(2\theta) + 2\cos(2\theta)$

$g'(x) = 0 \iff \tan(2\theta) = 2 \iff 2\theta = \arctan(2) + k\pi \iff \frac{\arctan(2)}{2} + \frac{k\pi}{2}$

$\Longrightarrow$



TROVO se $\tan(2\theta) = 2 \Rightarrow \tan(\theta) = t$ =

$$\frac{2t}{1-t^2} = 2 \iff 2t = 2 - 2t^2$$

$\Rightarrow$ TROVO t_1 t_2 (t_1 mi dà due angoli / t_2 " " due angoli) $\Rightarrow$ 4 PUNTI

... TO BE CONTINUED (VELOCEMENTE)