Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 09, 16 ottobre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

DUNQUE SE $x_0 \in A$ è stazionario per $f \Rightarrow$

$H_f(x_0) > 0$ (nel senso che la $\phi(x) = (H_f\, x) \cdot x$ è def. pos.)

$\Rightarrow$ x_0 è pto di minimo

$H_f(x) < 0 \Rightarrow x_0$ è pto di max

$H_f(x)$ è indefinito (nel senso che tutti gli autov. sono $\neq 0$ ma non hanno tutti lo stesso segno)

$\Rightarrow$ x_0 è "punto di sella" – IN QUESTO CASO SI TROVANO X^+ e X^- sottospazi di $\mathbb{R}^N$, $X^+ \neq \{0\}$, $X^- \neq \{0\}$ $X^+ \cap X^- = \{0\}$

$X^+ \oplus X^- = \mathbb{R}^N$ tali che $\phi(x) > 0$ su X^+

$\phi(x) < 0$ su X^- ($X^+ = \text{span}(e_1^+ \dots e_k^+)$

$X^- = \text{span}(e_1^- \dots e_h^-)$) dove $e_1^+ \dots e_k^+$ autovett. con autovalore > 0 / $e_1^- \dots e_h^-$ autovett. con autov. < 0

ESEMPI $\quad f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$

È definita su tutto $\mathbb{R}^2$.

Calcoliamo il gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y - 4 \\ 2x + 8 \end{pmatrix}$$

$\nabla f = 0 \iff x = -4$ e $y = 6$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo autovalori e autovettori di $H_f(-4,6)$

Polinomio caratteristico: $P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda, & 2 \\ 2 & , -\lambda \end{pmatrix} =$

$\lambda(\lambda - 2) - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 4$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+4} = 1 \pm \sqrt{5} \begin{cases} 1 + \sqrt{5} > 0 \\ 1 - \sqrt{5} < 0 \end{cases}$

DUNQUE $(-4, 6)$ è punto di sella

Calcoliamo anche gli autovettori:

Cerco $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = (1+\sqrt{5}) \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2u_1 + 2v_1 = (1+\sqrt{5})\, u_1 \\ 2u_1 = (1+\sqrt{5})\, v_1 \end{cases} \leftarrow \quad u_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} v_1$$

UN AUTOVETTORE di autov. $1+\sqrt{5}$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$

(se lo voglio di norma 1 devo dividere per $\sqrt{4+(1+\sqrt{5})^2}$

Un autovettore relativo a $1-\sqrt{5}$ è

$$e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad (\Leftarrow e_2 \perp e_1)$$

NELLA DIREZIONE DI e_1 f ha minimo

NELLA DIREZIONE DI e_2 f ha max

PROVIAMO A DISEGNARE LE LINEE DI LIVELLO DI $f(x,y)$. CONVIENE CONSIDERARE

$$f_1(h,k) = f((-4,6) + h e_1 + k e_2)$$

(ho fatto un cambio di variabili che manda

$e_1 \to \hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 \to \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

$(-4,6) \to (0,0)$)

(NON STO MANTENENDO LA "SCALA" perché $\|e_1\| \neq 1$, $\|e_2\| \neq 2$)

ALLORA $f((-4,6) + h e_1 + k e_2)$

$$f_1(h,k) = f\left(-4 + h(1+\sqrt{5}) - 2k,\ 6 + 2h + (1+\sqrt{5})k\right)$$

$$= (-4 + (1+\sqrt{5})h - 2k)^2 +$$

$$2(-4 + (1+\sqrt{5})h - 2k)(6 + 2h + (1+\sqrt{5})k)$$

$$-4(-4 + (1+\sqrt{5})h - 2k) + 8(6 + 2h + (1+\sqrt{5})k) =$$

$$16 + (1+\sqrt{5})^2 h^2 + 4k^2 - 8(1+\sqrt{5})h + 16k - 4(1+\sqrt{5})hk$$

$$-\cancel{4}8 - 16h - 8(1+\sqrt{5})k + 12(1+\sqrt{5})h + 4(1+\sqrt{5})h^2$$

$$+2(1+\sqrt{5})^2 hk - 24k - 8hk - 4(1+\sqrt{5})k^2$$

$$+16 - 4(1+\sqrt{5})h + 8k + \cancel{48} + 16h + 8(1+\sqrt{5})k$$

TERMINE IN hk $\rightarrow$ $-4(1+\sqrt{5}) + 2(\overbrace{1+5}^{6}+2\sqrt{5}) - 8 =$

$$-4 - 4\sqrt{5} + 12 + 4\sqrt{5} - 8 = 0$$

TERMINE IN h $\rightarrow$ $-\cancel{8} - 8\sqrt{5} - \cancel{16} + \cancel{12} + 12\sqrt{5} - \cancel{4} - 4\sqrt{5} + \cancel{16}$

$= 0$

TERMINE IN K VIENE ZERO ANCHE LUI

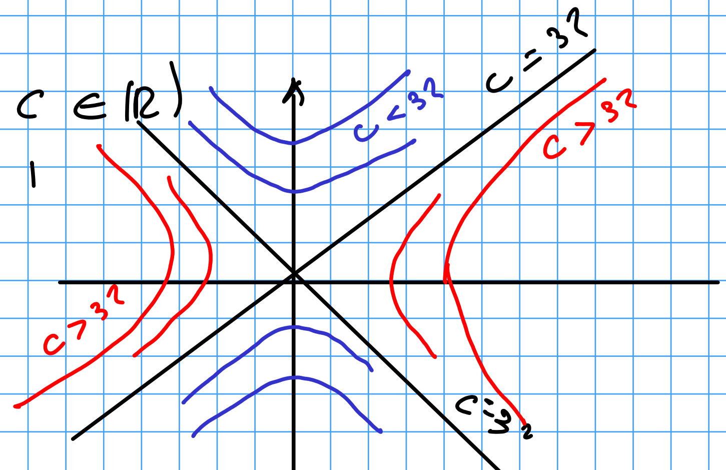
$$f_1(h,k) = 32 + (1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5}+4)h^2 + 4(1-1-\sqrt{5})k^2$$

$$= 32 + 5(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})h^2 - 4\sqrt{5}\,k^2$$

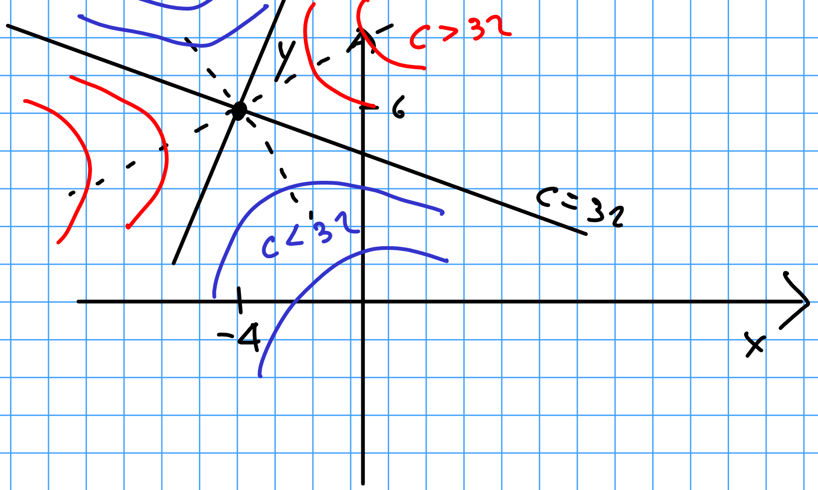
$\Rightarrow$ $f_1(h,k) = -c$ (per $c \in \mathbb{R}$)

SONO IPERBOLI

$$a^2h^2 - b^2k^2 = c - 32$$



$\Rightarrow$



$f(x,y)=c$

$32 = f(-4,6) =$ VALORE DI SELLA

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3x^2 \qquad (\text{DA } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$$

GRADIENTE

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 - 6y + 6x \\ -6x \end{pmatrix}$$

PTI STAZIONARI $\longrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6y + 6x = 0 \\ -6x = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x+6 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico $= 36\left(\lambda(\lambda-1) - 1\right) =$

$36(\lambda^2 - \lambda - 1)$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \end{cases}$$

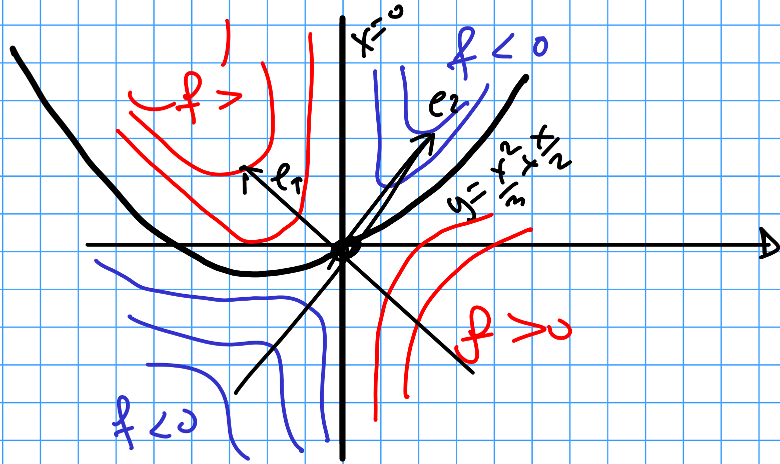
$(0,0)$ E' UNA SELLA

AUTOVETTURE REL. A $1+\sqrt{2}$

$$\begin{cases} h - k = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} h \\ -h = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} k \end{cases} \leftarrow e_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} +2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

VICINO A ZERO $\rightsquigarrow$



cerchiamo $f(x,y)=0 \iff$

$$2x^3+3x^2=6xy$$

$$\Updownarrow$$

$x=0$ oppure $y=\dfrac{2x^2+3x}{6}$

$$f(x,y)=x^3+y^3-(1+x+y)^3$$

(se sviluppo i cubi spariscono x^3 e y^3!!)

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2-3(1+x+y)^2\\ 3y^2-3(1+x+y)^2\end{pmatrix}$$

PUNTI STAZIONARI:

$$\begin{cases}x^2-(1+x+y)^2=0\\ y^2-(1+x+y)^2=0\end{cases} \Rightarrow x^2=y^2 \iff \begin{matrix}x=y\\ \text{o}\\ x=-y\end{matrix}$$

se $x=y \Rightarrow x^2-(1+2x)^2=0 \iff x^2-(1+4x+4x^2)=0$

$$x^2 - 1 - 4x - 4x^2 = 0 \iff 3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{-2 \pm 1}{3} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \quad \text{STAZIONARI}$$

se $x = -y \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{STAZIONARI}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 6(1+x+y) , & -6(1+x+y) \\ -6(1+x+y) , & 6y - 6(1+x+y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6-6y , & -6-6x-6y \\ -6-6x-6y , & -6-6x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6(1+y) & -6(1+x+y) \\ -6(1+x+y) & -6(1+x) \end{pmatrix}$$

$$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} ; \quad Hf(-1,+1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det = -36 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ SELLA

traccia $= -12$

ANALOGAMENTE IN $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $Hf = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

$\det = -36 < 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ SELLA

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow Hf = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

$\det = -36 < 0 \Rightarrow$ SELLA

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow Hf = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

determinante $\rightarrow 16 - 4 = 12 > 0$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

Traccia $= -8$ $\lambda_1 + \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_1 \circ \lambda_2 < 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ E' PUNTO DI MAX (LOCALE)