Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 08, 15 ottobre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

Ricordiamo un po' di terminologia relativa alle "forme quadratiche":

V spazio vettoriale di dimensione N.

Chiamo <u>applicazione bilineare</u> una $b: V \times V \to \mathbb{R}$:

$$b(\lambda v_1 + \mu v_2, v) = \lambda b(v_1, v) + \mu b(v_2, v)$$

$$b(v, \lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda b(v, v_1) + \mu b(v, v_2)$$

(LINEARE IN OGNUNO DEI DUE ARGOMENTI)

Chiamo <u>forma quadratica</u> una $\phi: V \to \mathbb{R}$ tale che $\phi(v) = b(v, v)$ per una opportuna applicazione bilineare b.

<u>NOTA</u> Se $\phi(v) = b(u, u) \Rightarrow$ posso supporre $\boxed{b \text{ simmetrica}}$, cioè $b(u, v) = b(v, u)$. Se b non è simmetrica prendo $b^*(u, v) = \dfrac{b(u, v) + b(v, u)}{2}$

b^* è simmetrica e $b^*(u, u) = \dfrac{b(u, u) + b(u, u)}{2} = b(u, u)$

NOTA Se $\phi(v) = b(v,v) \Rightarrow$

$$\phi(v_1+v_2) = b(v_1,v_1) + 2b(v_1,v_2) + b(v_2,v_2)$$
$$= \phi(v_1) + 2b(v_1,v_2) + \phi(v_2)$$
$$\phi(v_1-v_2) = \phi(v_1) - 2b(v_1,v_2) + \phi(v_2)$$

$$\Rightarrow b(v_1,v_2) = \frac{\phi(v_1+v_2) - \phi(v_1-v_2)}{4}$$

DUNQUE UNA $\phi : V \to \mathbb{R}$ è una forma quadratica

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{\phi(v_1+v_2) - \phi(v_1-v_2)}{4}$ è bilineare in (v_1,v_2)

(in particolare $\phi(tv) = t^2\phi(v)$)

Se in V c'è un prodotto scalare $\langle u,v\rangle$

allora ogni appl. bilineare b si rappresenta come

$$b(u,v) = \langle Lu, v\rangle \qquad \forall u,v \in V$$

dove L è una opportuna applicazione lineare da $V \to V$

DUNQUE se $\hat{e}_1 \dots \hat{e}_N$ è una base di V

$\Rightarrow$ ogni L lineare si rappresenta come una matrice

A, nel senso che

se $v = v_1 \hat{e}_1 + \dots + v_N \hat{e}_N$ $\quad L v = w_1 \hat{e}_1 + \dots w_N \hat{e}_N$

dove $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_N \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$

cioè $w_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j$

DUNQUE UNA FORMA QUADRATICA Φ si rappresenta

se $v = v_1 \hat{e}_1 + \dots + v_N \hat{e}_N$ $\Rightarrow \Phi(v) = (v_1 \dots v_N)\, A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$

$= \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} v_i v_j$ $\qquad$ (dove $a_{ij} = a_{ij}$)

ALCUNI RISULTATI IMPORTANTI (V sp. vett. con un $\langle \cdot, \cdot \rangle$ scalare)

Se $L: V \to V$ lineare e simmetrica

$\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle$ (cioè la matrice A associata a L è simmetrica)

$\Rightarrow$ tutti gli autovalori λ_i di L sono reali

ed esistono $e_1 \cdots e_N$ ortonormali con

e_i autovettore per L

$$\left(\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \Big\} \delta_{ij} \right)$$

<u>CONSEGUENZA</u> Se in V prendo la base $e_1 \cdots e_N$

L si rappresenta con $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$ dove

λ_i = autovalore corrispondente a e_i

<u>IN TERMINI DI MATRICI</u> Sia A $N \times N$ simmetrica. Considero

$L: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definita da $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \to A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$. Dato che A è simmetrica esistono $e_1 = \begin{pmatrix} e_{1,1} \\ \vdots \\ e_{1,N} \end{pmatrix} \dots e_N = \begin{pmatrix} e_{N,1} \\ \vdots \\ e_{N,N} \end{pmatrix}$ autovettori, ortonormali di

autovalori $\lambda_1 \dots \lambda_N$.

Prendiamo $M = \begin{pmatrix} e_{1,1} & \dots & e_{N,1} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{1,N} & \dots & e_{N,N} \end{pmatrix} \Rightarrow M\hat{e}_i = M \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{i,1} \\ \vdots \\ e_{i,N} \end{pmatrix} = e_i$

posto i-esimo

e viceversa $M^t e_i = \begin{pmatrix} e_{1,1} & \dots & e_{1,N} \\ \vdots & & \\ e_{N,1} & \dots & e_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{i,1} \\ \vdots \\ e_{i,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_i \\ \vdots \\ e_i \cdot e_i \\ \vdots \\ e_N \cdot e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_i$

DUNQUE $M^t = M^{-1}$. Ne segue che

$$M^t L M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = M^t L M (v_1 \hat{e}_1 + \dots + v_N \hat{e}_N) = M^t L (v_1 e_1 + \dots + v_N e_N) =$$

$$M^t (\lambda_1 v_1 e_1 + \dots + \lambda_N v_N e_N) = \lambda_1 v_1 \hat{e}_1 + \dots + \lambda_N v_N \hat{e}_N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

CIOÈ $M^t L M =$ MATRICE DIAGONALE $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$

DEF Dice che ϕ, forma quadratica è ≥ 0

se $\phi(v) \geq 0 \quad \forall v$ (o SEMIDEFINITA POSITIVA)

Dico che ϕ è strettamente positivo se

$\phi(v) > 0 \quad \forall v \neq 0$

(o DEFINITA POSITIVA)

Dato che ϕ si scrive $u^t \cdot A u$ e dato che, se mi metto nella base degli autovettori, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

SI VEDE CHE

$\phi \geq 0 \iff$ tutti i λ_i sono ≥ 0

$\phi > 0 \iff$ tutti i λ_i sono > 0

$\iff \phi(v) \geq \varepsilon \|v\|^2 \quad \forall v \in V$

dove $\varepsilon > 0$

(per vedere l'ultima affermazione si usa il fatto:

se $\phi(v) > 0 \quad \forall v \neq 0 \Rightarrow \phi(v) > 0 \quad \forall v \in S_1$

$= \{ v : \|v\| = 1 \}$. MA S_1 è chiuso e limitato, ϕ

è continua $\Rightarrow \quad \exists \quad \varepsilon = \min_{v \in S_1} \phi(v) \quad > 0$

$\Rightarrow \quad \forall v \in V \quad v \neq 0 \quad$ allora $\quad \hat{v} = \frac{v}{\|v\|} \in S_1$

$\Rightarrow \quad \phi(\hat{v}) \geq \varepsilon \quad (>0)$

$$\phi\left(\underbrace{\frac{v}{\|v\|}}_{=\hat{v}} \right) \geq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\phi(v)}{\|v\|^2} \geq \varepsilon \Leftrightarrow \phi(v) \geq \varepsilon \|v\|^2$$

SE INVECE CI SONO v_1 e v_2 tali che $\phi(v_1) > 0$

$\phi(v_2) < 0$ (e allora necessariamente ci sono un autov. $\lambda > 0$ e uno negativo $\cancel{\mu} < 0$) SI DICE CHE

ϕ (o A) è INDEFINITA

TEOREMA Se $f: A \to \mathbb{R}$ derivabile due volte, A aperto $x_0 \in A$

(DUNQUE $x_0 \notin \partial A$!!) e se x_0 è stazionario

cioè $\nabla f(x_0) = 0$.

SE $Hf(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è punto di minimo relativo

SE $Hf(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è pt di max. rel.

DIM. Caso del minimo USO TAYLOR AL II° ORDINE

$$f(x) = f(x_0) + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\nabla f(x_0)}(x-x_0) + \frac{1}{2} Hf(x_0)(x-x_0)^2 + o(\|x-x_0\|^2)$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2}\left(Hf(x_0) + o(1)\right)(x-x_0)^2 \geq$$

$$-$$

$$f(x_0) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon + o(1)\right)\|x-x_0\|^2 \geq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\|x-x_0\|^2$$

se $x \in B(x_0, \rho)$ se ρ piccolo $\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in B(x_0, \rho)$