Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 07, 14 ottobre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

Ricordiamo di nuovo la def di $d^2 f$.

$f : A \to \mathbb{R}^M$ $\quad$ $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $x_0 \in A$

Abbiamo definito $df(x_0)$ che è una appl. lineare da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

($df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ← matrici $M \times N$)

applicazioni lineari da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

Se $df(x)$ esiste in $\forall x \in \Omega$, ho $x \mapsto df(x_0)$

che è una applicazione $df : A \to \underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)}_{\text{è come } \mathbb{R}^{N \cdot M}}$

Può esistere $d(df)(x_0)$ che è una applicazione lineare da $\mathbb{R}^N \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$. Scriveremo $d(df) = d^2 f$

Dunque dato $h_1 \in \mathbb{R}^N$ $\quad d^2 f(x_0)(h_1) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$

$\Rightarrow \forall h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ si può fare $\left(d^2 f(x_0)(h_1)\right)(h_2)$

DUNQUE $d^2 f(x_0) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ LINEARE che indico con $d^2 f(x_0)(h_1, h_2)$

<u>FATTO</u> Se $d^2 f(x_0)$ esiste $\Rightarrow$

$$d^2 f(x_0)(h_1,h_2) = \left(f'(x_0)(h_1)\right)'(h_2)$$

$$\uparrow$$

$$\underbrace{\text{la chiamo } f''(x_0)(h_1,h_2)}_{\text{derivata direzionale } 2^a \text{ rispetto a } h_1 \text{ e } h_2}$$

<u>TEOREMA (NO DIM.)</u> Se $\exists\, d^2 f(x_0) \Rightarrow \exists\, f''(x_0)(h_1,h_2)$

e vale $f''(x_0)(h_1,h_2) = d^2 f(x_0)(h_1,h_2)$

IL VICEVERSA È FALSO. Però se in un intorno di x_0 esistono le derivate parziali:

$$f''(x_0)(\hat{e}_i,\hat{e}_j) \leftarrow \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

e queste sono continue in $x_0 \Rightarrow \exists\, d^2 f(x_0)$

e quest'ultimo è univocamente determinato da:

$$d^2 f(x_0)(v_1,v_2) = f''(x_0)(v_1,v_2) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} v_{1,i}\, v_{2,j}$$

vettori di $\mathbb{R}^n$

NEL CASO $M=1$ ($f: A \to \mathbb{R}$), la matrice

$$H_f(x_0) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right]_{i,j=1..N}$$ si chiama MATRICE HESSIANA o HESSIANO

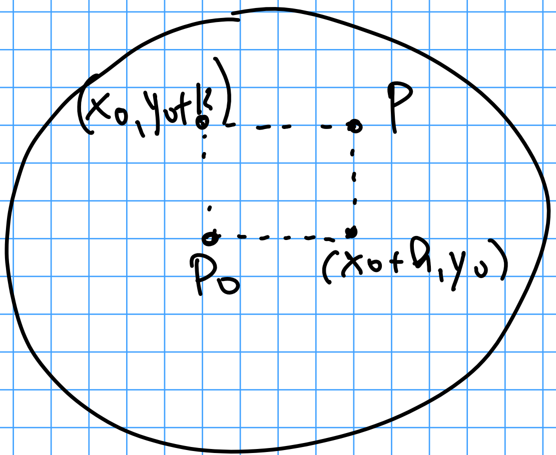
NEI CASI "ONESTI" $\Rightarrow$ H_f è simmetrica:

<u>TEOREMA</u> (di SCHWARTZ) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ esistono per x in un intorno di x_0, e sono continue in x_0 $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$$

<u>DIM.</u> FACCIO IL CASO $N=2$ $\Rightarrow$ ho una $f(x,y)$

e voglio dim. che $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0)$$



$P_0 = (x_0, y_0)$ $\quad$ $P = (x, y)$

$h = x - x_0$

$k = y - y_0$

CONSIDERIAMO

$$Q(h,k) := \underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)}_{\Delta(h,k)} - \underbrace{\left(f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)\right)}_{\Delta(0,k)}$$

$\Downarrow$

USO LAGRANGE TROVO
$t(h,k) \in]0,1[$ tale di

$$\Delta(h,k) - \Delta(0,k) = \frac{d}{dh}\Delta(h', k)\, h \qquad \boxed{0<|h'|<|h|}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0+h, y_0+k) - \partial f(x_0+h, y_0)\Big|_{h=h'}\right) h =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0+h', y_0+k) - \frac{\partial}{\partial x} f(x+h', y_0)\right) h$$

$\parallel$ (Lagrange in y)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x_0+h', y_0+k')\, h\, k}_{Q(h,k)} \qquad \text{per} \quad |k'|<|k|$$

FACENDO GLI STESSI CALCOLI - PRIMA IN Y e poi in X TROVO

$$Q(h,k) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x_0 + h'', y_0 + k'')hk$$

per qualche h'' tra 0 e h, k'' tra zero e k

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x_0+h', y_0+k')\cancel{hk} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(x_0+h'', y_0+k'')\cancel{hk}$$

se mando $(h,k) \to 0 \Rightarrow (h',k') \to 0 \quad (h'',k'') \to 0$

e cioè $(x_0+h', y_0+k') \to (x_0, y_0)$
$(x_0+h'', y_0+k'') \to (x_0, y_0)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$$

FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE 2 (CASO $M=1$)

Se f è differenziabile 2 volte in A, $d^2f(x)$ continuo $\Rightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}Hf(x_0)(x-x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$$

DIM. Si usa Taylor unidimensionale per la funzione $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$

(f sul segmento da x_0 e x)

$$\varphi'(t) = \nabla f(x_0 + t(x - x_0)) \circ (x - x_0) \quad \left(df(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) \right)$$

$$\varphi''(t) = H_f(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)(x - x_0)$$

Da Taylor in 1 variabile:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2}\varphi''(s)\, 1^2$$

con $s \in]0,1[$

cioè

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} H_f(x_0 + s(x - x_0))(x - x_0)^2$$

$$f(x_0) + \nabla f(x_0) \circ (x - x_0) + \frac{1}{2} H_f(x_0)(x - x_0)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \underbrace{\left(H_f(x_0 + s(x - x_0)) - H_f(x_0) \right)}_{\text{tende a zero per } x \to x_0} (x - x_0)^2$$

$o(\|x-x_0\|^2)$

OSSERVAZIONE Si può anche fare Taylor al primo ordine: se $\varphi(t) = f(x_0 + t(x-x_0))$ e se $\exists\, \nabla f(x)\ \forall x \in A \Rightarrow$, applicando Lagrange a φ tra 0 e 1 $\Rightarrow$

$$\frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1-0} = \varphi'(t) \qquad 0 < t < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \nabla f(\underbrace{x_0 + s(x-x_0)}_{\text{punto sul segmento tra } x_0 \text{ e } x}) \cdot (x - x_0)}$$

Se ne ricava

$$\|f(x) - f(y)\| \le \max_{z \text{ tra } x \text{ e } y} \|\nabla f(z)\|\ \|x-y\|$$

(se ∇f esiste continuo $\Rightarrow$ f è LIPSCHITZIANA SUI CHIUSI-LIMITATI)

RICERCA DEI MAX / MIN PER UNA $f: A \to \mathbb{R}$

TEOREMA (FERMAT IN $\mathbb{R}^N$)

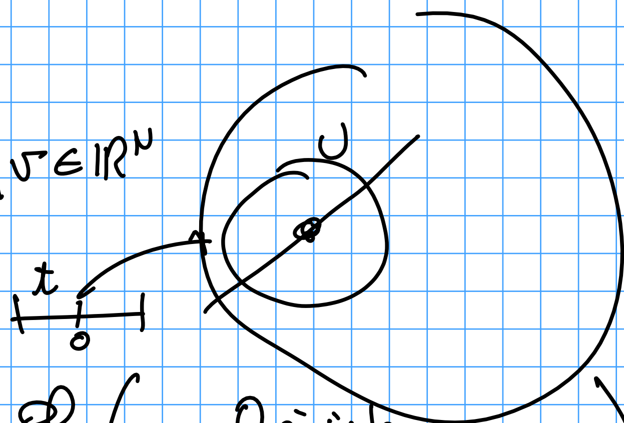
Se $f: A \to \mathbb{R}$ A aperto, f differenziabile in A.

$x_0 \in A$ (x è interno dato che A è aperto)

x_0 pto di max / min relativo

($\exists\ U$ intorno di x_0, $U \subset A$, tale che $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in U$
$f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in U$)

$$\Longrightarrow \quad \nabla f(x_0) = 0$$



DIM Prendo un x dell'intorno U, $v \in \mathbb{R}^N$

$\varphi(t) = \varphi(x_0 + t v)$

x_0 MAX REL $\Rightarrow$ 0 è max rel per φ (e 0 è interno alle t per cui HA senso $\varphi(t)$)

$\Rightarrow \varphi'(0) = 0$

$\quad = \nabla f(x_0) \cdot v$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(x_0) \cdot v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^N$$

se faccio variare v da $\hat{e}_1 \cdots \hat{e}_N$ trovo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_N} \Rightarrow$$

GLI ESTREMI RELATIVI SONO PUNTI STAZIONARI

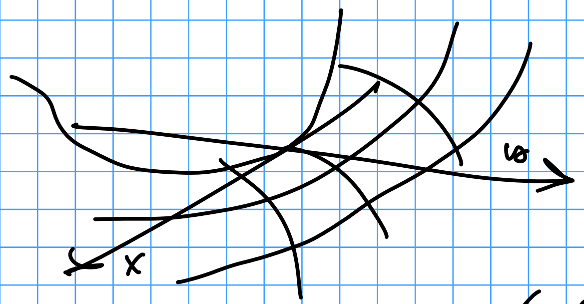
ESEMPIO $\quad f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0,0) = 0$$

PERÒ $\quad x \mapsto f(x,0) = x^2$ è convessa e ha minimo in zero

$y \mapsto f(0,y) = -y^2$ è concava e ha max in zero



"SELLA"

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>ESEMPIO SIMILE</u> $\quad f(x,y) = x \cdot y$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

C'È UN (UNICO) PTO STAZ. IN $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo autovalori / autovettori di H_f

Autovalori : radici di $\det(H_f - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} =$

$\lambda^2 - 1$ cioè $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -1$

Si vede (a occhio) che $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore per $\lambda_1 = 1$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore per $\lambda_2 = -1$

$\leadsto$ su $\{x = y\}$ HO UN MINIMO

su $\{x = -y\}$ HO UN MAX