Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 6, 9 ottobre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

FORMULA SUL DIFFERENZIALE DELLA COMPOSIZIONE

$f : A \to \mathbb{R}^M$ $\quad g : B \to \mathbb{R}^K$ $\quad A$ aperto di $\mathbb{R}^N$

B aperto di $\mathbb{R}^M$ $\quad x_0 \in A$ $\quad y_0 \in B$ $\quad f(x_0) = y_0$

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0)$$

OPPURE

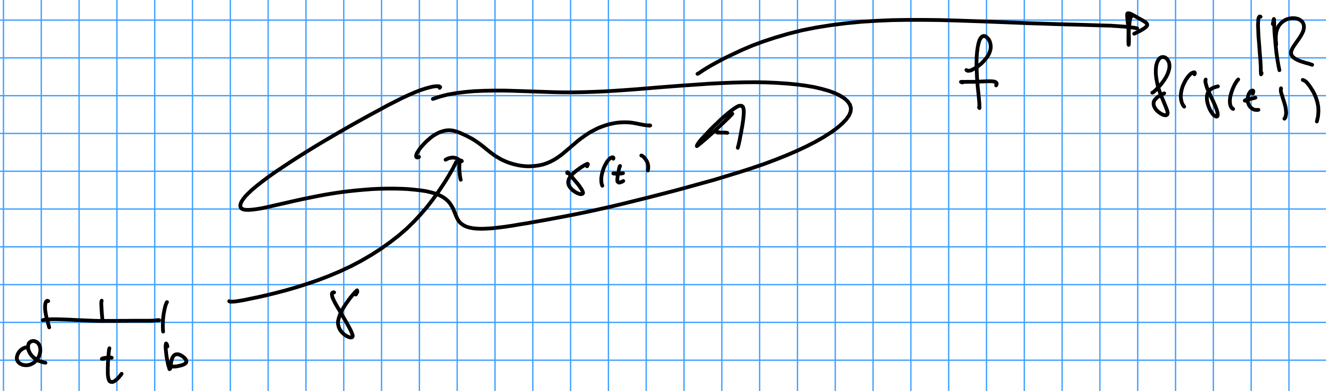
$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(y_0) \, J_f(x_0)$$

IN TERMINI DI DER. PARZIALI :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)_h = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial g_h}{\partial y_j}(y_0) \, \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$$

$i = 1 \dots N \; , \; h = 1 \dots K$

<u>CONSIDERIAMO</u> $\quad f : A \to \mathbb{R} \quad$ e $\quad \gamma : [a, b] \to A$



HA SENSO FARE $\varphi(t) = f(\gamma(t))$ $\quad \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$

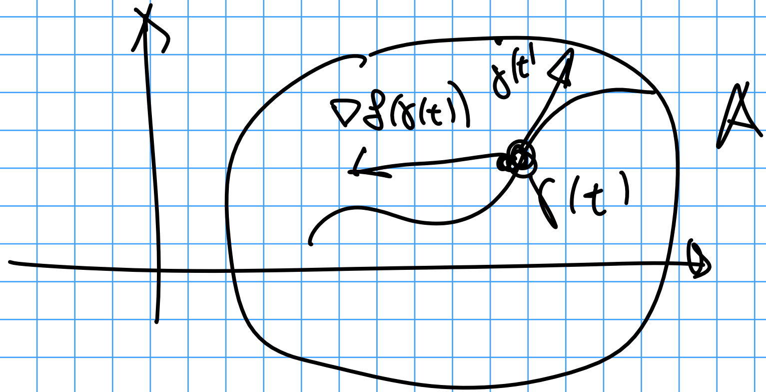
VOGLIO CALCOLARE $\varphi'(t)$ (derivata di f sulla curva)

$$[a,b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^N \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

cioè $$J_\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_N'(t) \end{pmatrix}$$

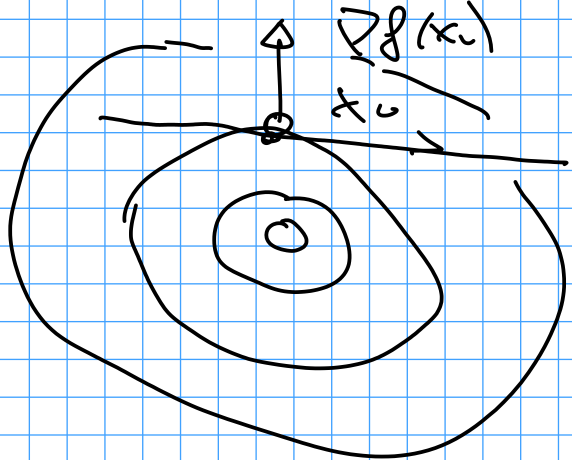
mentre $$J_f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(t) = J_f(\gamma(t))\,(\gamma'(t)) = \boxed{\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}$$



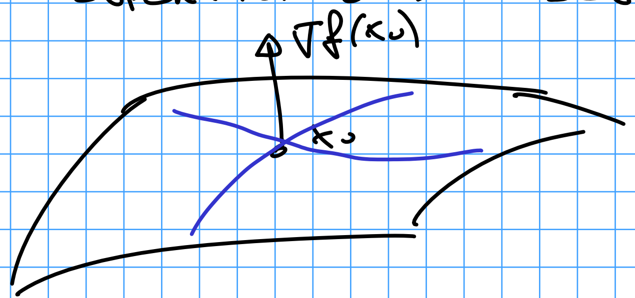
- Se $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla f(\gamma(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = 0$
- Se $f(\gamma(t)) =$ costante $\Rightarrow \nabla f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t)$

$\Rightarrow \nabla f(x_0)$ è perpendicolare a ogni "curva di livello" passante per x_0



$N > 2$ Ho

SUPERFICI DI LIVELLO



ESERCIZI

$$f(x,y) = \frac{x^{5/3}\, y^{4/3}}{x^2+y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

COSA SUCCEDE IN $(0,0)$??

(1) cerchiamo se esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

PASSO IN COORDINATE POLARI

$$f(\rho,\theta) = \frac{\rho^{5/3}\rho^{4/3}}{\rho^2} \cos^{5/3}(\theta) \sin^{4/3}(\theta) =$$

$$\rho \cos^{5/3}(\theta) \sin^{4/3}(\theta) \implies$$

$$|f(\rho,\theta)| \leq \rho \implies \lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta) = 0$$

(IN (x,y) ho

$$|f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2} \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$)

DUNQUE f è continua in $(0,0)$.

(2) Se $(x,y) \neq (0,0)$ f è differenziabile perché

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}(x^2+y^2) - 2x\, x^{5/3}y^{4/3}\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left(\frac{4}{3}x^{5/3}y^{1/3}(x^2+y^2) - 2y\, x^{5/3}y^{4/3}\right)$$

che sono continue per $(x,y) \neq (0,0)$

(3) Per vedere se f è differenziabile in $(0,0)$ calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e vediamo se valgono le ipotesi del diff. totale

È chiaro che $f(0,y) = 0$, $f(x,0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

PER APPLICARE IL TEOREMA MI SERVE

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

(a) PROVIAMO A METTERE $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ IN COORDINATE POLARI.

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}(x^2+y^2) - 2x\, x^{5/3}y^{4/3}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\rho^4}\left(\frac{5}{3}\rho^2\cos(\theta)^{\frac{2}{3}}\sin(\theta)^{\frac{4}{3}}\rho^2 - \rho^4\cos(\theta)^{5/3}\sin(\theta)^{4/3}\right) =$$

$$\frac{5}{3}\cos(\theta)^{\frac{2}{3}}\sin(\theta)^{\frac{4}{3}} - \cos(\theta)^{5/3}\sin(\theta)^{4/3} = M(\theta)$$

NON TENDE A ZERO PER $\rho \to 0$

SE RILEGGO IL TUTTO IN (x,y) VEDO CHE

I LIMITI SULLE RETTE USCENTI DA ZERO

$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = M(\theta)$ DIPENDE DA θ

IL LIMITE NON ESISTE

(Stesso discorso per $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ se $(x,y)\to(0,0)$)

PROVIAMO A CALCOLARE $f'(0,0)(v_1,v_2)$

cioè prendiamo $\varphi(t) = f(tv_1, tv_2)$ e

calcoliamo $\varphi'(0)$

$$\varphi(t) = \frac{t^{3} v_1^{5/3} v_2^{4/3}}{\cancel{t^2}(v_1^2 + v_2^2)} \Rightarrow$$

$$f'(0,0)(v_1,v_2) = \frac{v_1^{5/3} v_2^{4/3}}{v_1^2 + v_2^2} \neq 0 \text{ se } v_1 v_2 \neq 0$$

$$\Rightarrow f'(0,0)(v_1,v_2) \neq v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

e allora f NON È DIFFERENZIABILE IN ZERO.

L'ULTIMO DISCORSO SIGNIFICA CHE

NON È VERO CHE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$

– PROVIAMO A VEDERE DIRETTAMENTE QUESTA ULTIMA AFFERMAZIONE

SCRIVIAMO $\dfrac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}$ IN COORDINATE POLARI

VIENE $\dfrac{\cancel{\rho^3}\cos(\theta)^{5/3}\sin(\theta)^{4/3}}{\cancel{\rho^3}} = M(\theta)$

= FUNZIONE DI θ che non è identicamente nulla

QUINDI NON PUÒ AVERE LIMITE ZERO !!!

$\boxed{\text{37 del libro}}$

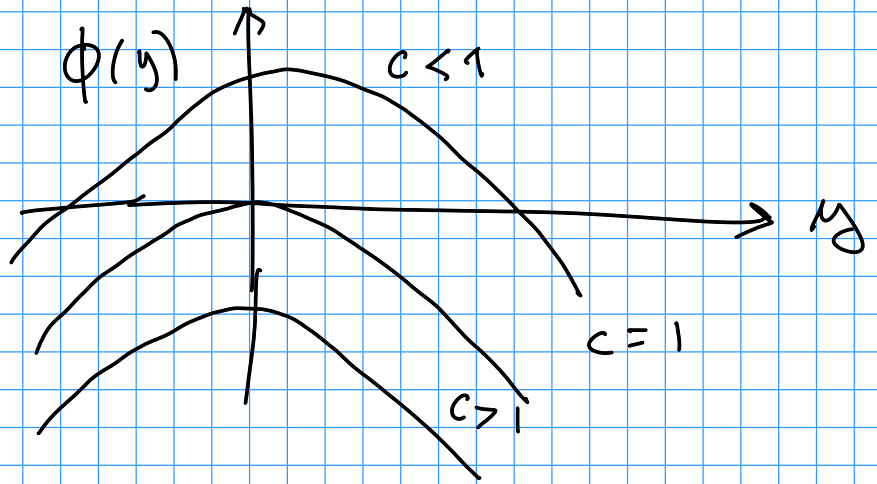
$$f(x,y) = 1 - 2x^2 - y^4$$

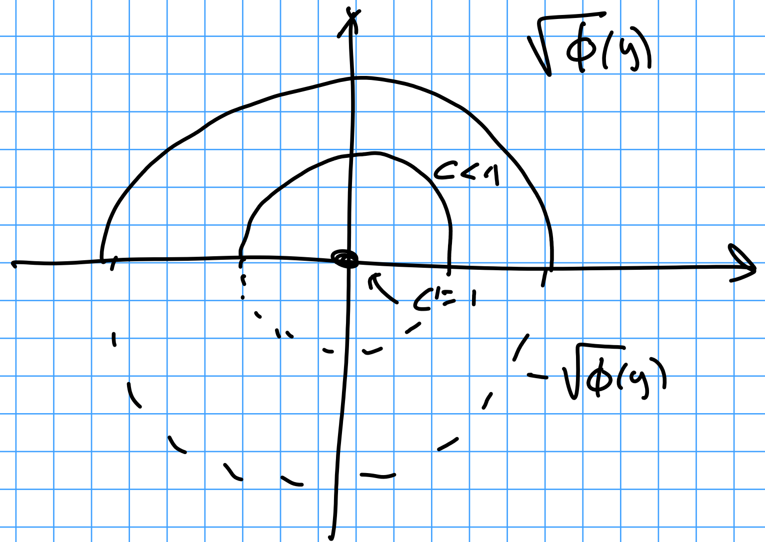
Cerchiamo le linee di livello $f(x,y) = c$

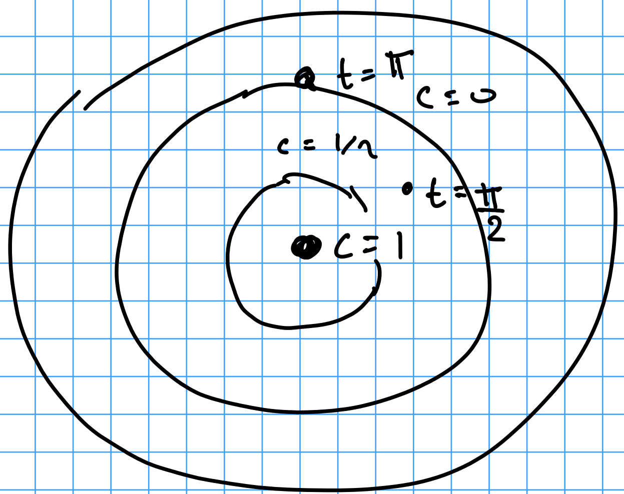
$$\iff 2x^2 = 1 - c - y^4 \iff x = \pm\sqrt{\frac{1-c-y^4}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\phi(y)}$$

dove $\phi(y) = 1 - c - y^4$







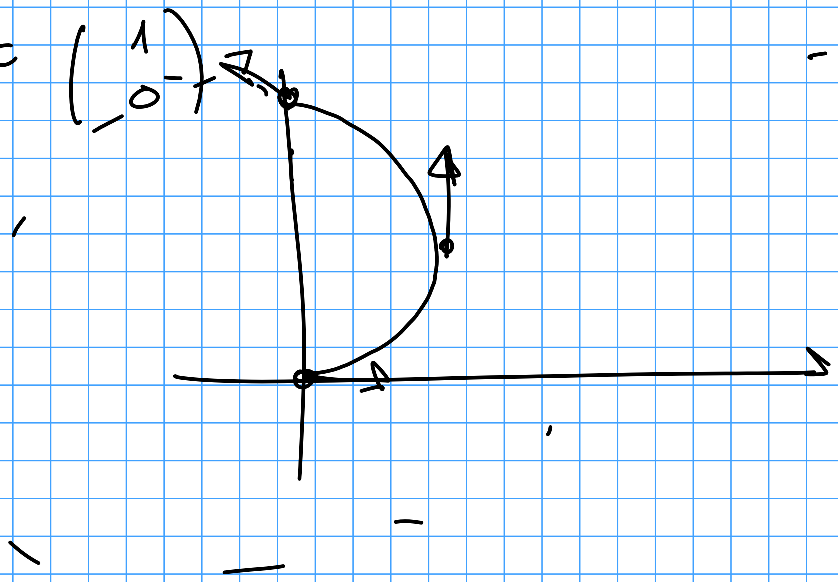
HO UNA CURVA DESCRITTA IN COORDINATE POLARI DA $\rho = 2\theta$ (?2)

$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\theta$$

$$\boxed{\gamma(\rho) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\rho/2) \\ \rho\sin(\rho/2) \end{pmatrix}}$$

Vediamo quanto fa $\gamma'(\rho) = \begin{pmatrix} \cos(\rho/2) - \frac{\rho}{2}\sin(\rho/2) \\ \sin(\rho/2) + \frac{\rho}{2}\cos(\rho/2) \end{pmatrix}$

$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



SE CALCOLIAMO $f(\gamma(\rho))$ abbiamo la "discesa" "al tempo ρ"

POTREMMO CALCOLARE $\frac{d}{d\rho} f(\gamma(\rho))$ = velocità di discesa e verrebbe $\nabla f(\gamma(\rho)) \cdot \gamma'(\rho) \ldots$

(RIPRENDEREMO QUESTO ESEMPIO QUANDO AVREMO FATTO MEGLIO LE CURVE!)

DATA $f : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$

ABBIAMO DEFINITO $df(x_0)$ quando $x_0 \in A$.

SE f è differenziabile $\forall x \in A$ risulta definita

$df : A \to \mathbb{R}^{NM}$ (INTERPRETANDO $df(x)$ come $J_f(x)$)

E' POSSIBILE CHIEDERSI SE QUEST'ULTIMA FUNZIONE E' DIFFERENZIABILE IN UN PTO x_0, SE SÌ

$d(df)(x_0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{NM}$

(A RIGORE $\boxed{d(df) : \mathbb{R}^N \to (\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M))}$

$d^2 f(x_0)$ e SI APPLICA A DUE vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^N$

perché $\underbrace{d(df)(x_0)(v_1)}_{\text{lo posso applicare a } v_2 \in \mathbb{R}}$ è funzione lineare da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

DUNQUE $d^2 f(x_0)$ è una "applicazione bilineare" cioè $\quad d^2 f(x_0) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ (bi)lineare

Dati: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^N$ $\quad d^2 f(x_0)(v_1, v_2)$ rappresenta

$$d^2 f(x)(v_1, v_2) = \Big(f'(x)\, v_1\Big)'(v_2)\Big|_{x=x_0} \underset{\text{DEF.}}{=:} f''(x_0)(v_1, v_2)$$

SE $v_1 = \hat{e}_k$, $v_2 = \hat{e}_h$ questo mi definisce

$$\frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x)\Big|_{x=x_0}$$

QUINDI (rifocando i discorsi fatti per il 1° diff.)

- Se f ha differenziale secondo in x_0 $\Rightarrow$

  $\exists \; f''(x_0)(v_1, v_2)$

  $\Rightarrow$ (in particolare) $\exists \; \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k}(x_0)$

- Se $M = 1$ questa operazione produce una matrice $N \times N$ $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k}(x_0) \right)$ che si chiama

MATRICE HESSIANA DI f in x_0

- PER AVERE LA DIFF. DI ORDINE 2 BASTA CHE $\frac{\partial^2 f}{\partial x_q \partial x_k}$ esistano in un intorno di x_0 e siano continue in x_0 (DIFF. TOTALE PER $df(x)$)

ESEMPIO $\quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

- $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - 2x(xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad ((x,y) \neq (0,0))$

- $\frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = \frac{x(x^2+y^2) - 2y(xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$\nabla f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

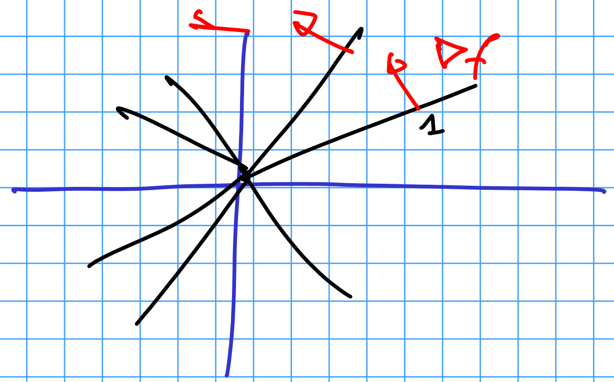
NOTA CHE $\nabla f(x,y) \perp \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

VEDIAMO COME SONO LE LINEE DI LIVELLO

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = c \qquad c(x^2+y^2) = xy \qquad ?!$$

(in coordinate polari

$$\frac{\rho^2 \sin\theta \cos\theta}{\rho^2} = c$$



PROVIAMO A CALCOLARE L'HESSIANO

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial x} = \frac{y}{(x^2+y^2)^4}\left(-2x(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)2(x^2+y^2)2x\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2)^3}\left(-2x(x^2+y^2) - 4x(x^2-y^2)\right) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^3}\left(x^2+y^2+2x^2-2y^2\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^3}(3x^2-y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^3}(3y^2-x^2)$$

$$\Rightarrow Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

FACENDO I CALCOLI SI SCOPRE CHE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Leftarrow$$ FATTO GENERALE SE VALGONO DELLE IPOTESI (NATURALI)

$Hf(x_0)$ è legato a "proprietà del secondo ordine" (curvatura ??) di f vicino a