Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 5, 8 ottobre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

TEOREMI DI "CALCOLO" DEI DIFFERENZIALI

$f, g : A \to \mathbb{R}^M$ $\quad A$ aperto di $\mathbb{R}^N$ $\quad x_0 \in A$

f e g differenziabili in x_0. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ALLORA

(a) $\lambda f + \mu g$ è differenziabile in x_0 e

$$d(f+g)(x_0) = \lambda\, df(x_0) + \mu\, dg(x_0)$$

- In termini di matrici $\quad J_{f+g}(x_0) = J_f(x_0) + J_g(x_0)$
- componente per componente $\quad i = 1..N,\ j = 1..M$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f+g)_j(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_0) + \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(x_0)$$

(b) SE $M = 1$ $\quad fg$ è differenziabile in x_0 e

$$\nabla(fg)(x_0) = g(x_0)\nabla f(x_0) + f(x_0)\nabla g(x_0)$$

(c) $f \cdot g$ (prodotto scalare in $\mathbb{R}^M$) è differenziabile in x_0

e $\nabla(f \cdot g)(x_0) = J_f(x_0)^t\, g(x_0) + J_g(x_0)^t\, f(x_0)$.

Dim. di (c) So che

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

$$g(x) = g(x_0) + dg(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \cdot g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0)(x - x_0)$$

$$+ f(x_0) \cdot o(\|x - x_0\|) + g(x_0) \cdot df(x_0)(x - x_0) +$$

$$df(x_0)(x - x_0) \cdot dg(x_0)(x - x_0) + df(x_0)(x - x_0) \cdot o(\|x - x_0\|)$$

$$+ o(\|x - x_0\|)(\ldots) =$$

(i rossi sono $o(\|x - x_0\|)$)

$$f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0)(x - x_0) + g(x_0) \cdot df(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

QUESTO MI DICE CHE $f \cdot g$ è diff in x_0 e che $\forall v \in \mathbb{R}^N$

$$\boxed{d(f \cdot g)(x_0)(v) = f(x_0) \cdot dg(x_0)(v) + g(x_0) \cdot df(x_0)(v)}$$

IN TERMINI DI JACOBIANI

$$J_{f\cdot g}(x_0)\cdot v = f(x_0)\cdot\big(J_g(x_0)\,v\big) + g(x_0)\cdot\big(J_f(x_0)\,v\big)$$

$$= f(x_0)^t\big(J_g(x_0)\,v\big) + g(x_0)^t\big(J_g(x_0)\,v\big) =$$

$$= \big(J_g(x_0)^t f(x_0)\big)^t v + \big(J_f(x_0)^t g(x_0)\big)^t v$$

$$\Rightarrow J_{f\cdot g}(x_0) = \big(J_g(x_0)^t f(x_0) + J_f(x_0)^t g(x_0)\big)^t \qquad \circledast$$

NOTA CHE LE DIMENSIONI TORNANO

perché $J_g(x_0): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$; $J_g(x_0)^t: \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$

$f(x_0) \in \mathbb{R}^M \Rightarrow J_g(x_0)^t f(x_0) \in \mathbb{R}^N$

e il suo trasposto è "un N-rigo"

IN TERMINI DI GRADIENTE $\circledast$ DIVENTA

$$\underbrace{\nabla(f\cdot g)(x_0)}_{\in\mathbb{R}^N} = \underbrace{J_g(x_0)^t}_{\mathbb{R}^M\to\mathbb{R}^N}\,\underbrace{f(x_0)}_{\in\mathbb{R}^M} + J_f(x_0)^t g(x_0)$$

IN TERMINI DI COMPONENTI HO

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{j=1}^{M} f_j(x)\, g_j(x) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g)(x_0) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_j(x_0)\, g_j(x_0)\right) =$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)\, g_j(x_0)}_{J_f(x_0)^t\, g(x_0)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{M} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}(x_0)\, f_j(x_0)}_{J_g(x_0)^t\, f(x_0)}$$

QUESTI ULTIMI CALCOLI VANNO BENE PURCHÉ ESISTANO LE DERIVATE PARZIALI DI $f \cdot g$.

PER LA DIFFERENZIABILITÀ SERVE LA DIFF. DI f e g (IN x_0)

DIFFERENZIALE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

A aperto in $\mathbb{R}^N$ $\quad x_0 \in A$

B aperto in $\mathbb{R}^M$ $\quad y_0 \in B$

$f : A \to \mathbb{R}^M$ con $f(x_0) = y_0$, f diff. in x_0

$g : B \to \mathbb{R}^K$ g diff. in y_0

Allora se x è abbastanza vicino a x_0 è definito $g(f(x))$ [: $\exists\, \rho_1 > 0$ tale che $B(y_0, \rho_1) \subset B$

Dato che f è continua in x_0, $\exists\, \rho > 0$ tale che $B(x_0, \rho) \subset A$ e $\forall x \in B(x_0, \rho) \Rightarrow f(x) \in B(y_0, \rho_1)$

QUINDI $g(f(x))$ ha senso per $x \in B(x_0, \rho)$]

ALLORA $g \circ f$ è differenziabile in x_0 e

$$\underbrace{d(g \circ f)(x_0)}_{\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K} = \underbrace{dg(y_0)}_{\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^K} \circ \underbrace{df(x_0)}_{\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M}$$

DIM. So che

$$f(x) = \overset{= y_0}{f(x_0)} + df(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|_N)$$

$$g(y) = g(y_0) + dg(y_0)(y-y_0) + o(|y-y_0|_M)$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = g(y_0) + dg(y_0)\left(df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|_N)\right)$$

$$+ o\left(\| d(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|_N) \|_M\right) =$$

$$o(O(\|x-x_0\|)) = o(\|x-x_0\|)$$

$$g(f(x_0)) + \underbrace{dg(y_0) \circ f(x_0)(x-x_0)}_{\text{deve essere } d(g\circ f)(x_0)} + o(\|x-x_0\|_N)$$

$\Rightarrow$ TESI

CONSEGUENZA SUGLI JACOBIANI E SULLE DERIVATE PARZIALI

$$\Rightarrow J_{g\circ f}(x_0) = J_g(y_0)\, J_f(x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (g\circ f)_h}{\partial x_i} = \text{componente } i, h \text{ di } \quad e$$

cioè $\displaystyle\sum_{j=1}^{M} \frac{\partial g_h}{\partial x_j}(y_0)\, \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$

PERCHÈ

$$J_g(y_i) = \left\{ \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \right\} \qquad \begin{pmatrix} k = 1 \dots K \\ j = 1 \dots M \\ i = 1 \dots N \end{pmatrix}$$

$$J_f(x_i) = \left\{ \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right.$$