# Analisi Matematica II

## prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 4, 7 ottobre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

# DIFFERENZIALE

Se $f : A \to \mathbb{R}^M$ $\quad A \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $x_0 \in A$

$f$ è differenziabile in $x_0$ se esiste una applicazione lineare $\alpha : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ tale che

$$(*) \quad f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

$$\left( \text{cioè} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0 \right)$$

- Si vede che se esiste tale $\alpha$, allora

$$f'(x_0)(v) = \alpha(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^N$$

(Basta mettere $x = x_0 + tv$ in $(*)$, dividere per $t$ e far tendere $t \to 0$)

DI CONSEGUENZA $\alpha$ è UNICO e lo chiamo "differenziale" di $f$ in $x_0$, scrivo $df(x_0)$

$df(x_0)$ è una applicazione lineare da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

- RAPPRESENTIAMO $df(x_0)$ come matrice

Uso la convenzione per cui se $v \in \mathbb{R}^N$ $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_N \end{pmatrix}$

REMIND

(i vettori sono COLONNE)

Se faccio così a ogni applicazione lineare $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ è associata una matrice $A$

con $N$ colonne e $M$ righe in modo che

se $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$ $L(v) = A \cdot v = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j$

$i = 1 \dots M$

($A$ è una matrice $M \times N$)

Sappiamo che $df(x_0)(v) = f'(x_0)(v)$

Prendiamo $v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ coordinata $i$-esima

e prendiamo la componente $j$ esima di $f'(x_0)(v_i)$

$= \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_0)$ $\Rightarrow$ la voglio rappresentare con

$$(A \cdot v_i)_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\,\delta_{ki} \qquad \left(\delta_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ 1 & \text{se } i = k \end{cases}\right)$$

$$= a_{ji} \qquad \left( = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)$$

DUNQUE $df(x_0)$ si rappresenta con la matrice

$$J_f(x_0) \quad \underbrace{\left( \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_M}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_M}{\partial x_N} \end{array} \right)}_{N} \Bigg\} M$$

(tutti calcolati in $x_0$)

MATRICE JACOBIANA IN $x_0$

IL TUTTO SI PUÒ FARE SE $f$ È DIFF. IN $x_0$

SOLO IN QUESTA IPOTESI

$$f'(x_0)(v) = J_f(x_0) \cdot v$$

(IN PARTICOLARE $\Rightarrow$ $f'(x_0)(v)$ è lineare in $v$)

Se $M=1$, in particolare

$$Jf(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) \right)$$

NOTA CHE $Jf(x_0)(v)$ si può scrivere

$$\nabla f(x_0) \bullet v$$

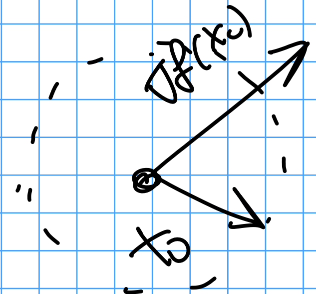
PRODOTTO SCALARE

DOVE $\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{pmatrix} = Jf(x_0)^T$

OSS. Se $v \in \mathbb{R}^N$, $f$ scalare $\Rightarrow$ ($f$ differenziabile in $x_0$)

$$f'(x_0)(v) = \underline{\nabla f(x_0) \bullet v} \qquad \nabla f(x_0) \neq 0$$

$|v| = 1$




$\Rightarrow$ TRA TUTTI, $v \in \mathbb{R}^N$ con $\|v\| = 1$ quello che rende massimo $f'(x_0)(v)$ è $\bar{v} = \dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

IL VALORE MASSIMO: $\max\limits_{\|v\|=1} f'(x_0)(v) = |\nabla f|(x_0)$

**DUNQUE**

- Lo "direzione" di $\nabla f(x_0)$ è la direzione che rende massimo $f'(x_0)v$ tra i $v$ di norma 1
- $|\nabla f|(x_0)$ è il valore della massima derivata $f'(x_0)(v)$ : $\|v\|=1$

**TEOREMA** Se $f$ è differenziabile in $x_0$ $\Rightarrow$ $f$ è continua in $x_0$

**Dim.** $f$ diff. in $x_0$ significa che

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + \sigma(x) \cdot \|x - x_0\|$$

dove $\sigma : A \to \mathbb{R}^m$ e $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma(x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad (+0) \quad \Rightarrow f$ continua in $x_0$

GIÀ VISTO CHE $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$ NON IMPLICA DIFFERENZIABILITÀ. ALTRO ESEMPIO:

- $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ $\qquad f(0,0)=0$

( $f$ è continua in $(0,0)$ )

Prendo $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e calcolo: $f'(\vec{0})(\vec{v})$

$\Rightarrow$ prendo $\varphi(t) = f(\vec{0} + t\vec{v})$ e calcolo $\varphi'(0)$

IN QUESTO CASO $\varphi(t) = \sqrt[3]{(t v_x)^2 \, t v_y} = t \sqrt[3]{v_x^2 v_y}$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(0) = \sqrt[3]{v_x^2 v_y} = f'(\vec{0})(\vec{v})$$

IN PARTICOLARE $\underset{\substack{\uparrow \\ f'(\vec{0})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = 0 \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ f'(\vec{0})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0 \quad \Rightarrow \nabla f(\vec{0}) = \vec{0}$

Se $f$ fosse differenziabile $\Rightarrow$ $f'(\vec{0})(v) = \nabla f(x_0) \cdot v = 0$

MA PER QUANTO visto prima $f'(\vec{0})\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \neq 0$

**TEOREMA** (del "DIFFERENZIALE TOTALE")

Se $f$ ha derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ $i = 1 \dots N$

per $x$ in un intorno di $x_0$ $\forall$, $B(x_0, \rho)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ sono

continue in $X_0$. ALLORA

$f$ è differenziabile in $x_0$

Se le der. parziali sono continue in tutto $B(x_0, \rho)$

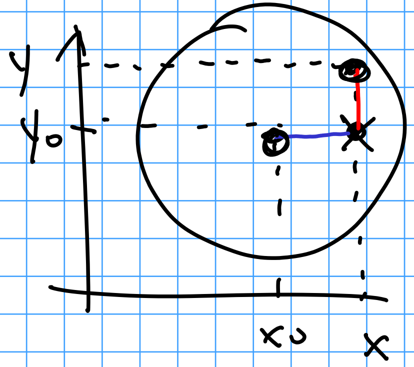
$\Rightarrow$ $f$ è differenziabile in $B(x_0, \rho)$

**DIM.** Nel caso $N=2$

Prendo $(x_0, y_0)$ tale che $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

esistono continue in tutto un disco $B((x_0, y_0), \rho)$

Prendiamo $(x, y)$ in $B((x_0, y_0), \rho)$




$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)(x-x_0)$$

per un opportuno $\xi$ tra $x_0$ e $x$

(Teorema di Lagrange applicato alla funzione $x \to f(x,y_0)$ )

NOTA $\xi = \xi(x, y_0)$. ANALOGAMENTE

$$f(x,y) = f(x,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)(y-y_0)$$

dove $\eta$ è compreso tra $y$ e $y_0$

$(\eta = \eta(x,y))$ DUNQUE

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x), y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta(x,y))(y-y_0) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\circledast} +$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} (x - x_0) + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta) - \frac{\partial}{\partial y}(x_0, y_0)\right)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} (y - y_0)$$

se $(x, y) \to (x_0, y_0)$ $\qquad$ se $(x, y) \to (x_0, y_0)$

perché se $(x, y) \to (x_0, y_0) \Rightarrow \xi(x) \to x_0, \; \eta(x, y) \to y_0$

cioè $\quad f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - x_0)}_{(*)}$

$$+ o\left(\|(x - x_0, y - y_0)\|\right)$$

$\Rightarrow$ $f$ è differenziabile in $(x_0, y_0)$

---

DAL TEOREMA SEGUE CHE, NELL'ESEMPIO DI PRIMA

$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y} = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ / $\frac{\partial f}{\partial y}$ (almeno una)

NON SONO CONTINUE IN $\vec{0}$. IN EFFETTI

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{2}{3}}$$

$\frac{\partial}{\partial y} f$ NON ESISTE se $x = 0$ $y \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ NON ESISTE SE $y=0$ $x\neq 0$

INOLTRE, ANCHE SE ESCLUDO QUESTE DIREZIONE

e MANDO $(x,y)\to(0,0)$ sulle rette $y=mx$ trovo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,mx) = \frac{2}{3} m^{1/3} \xrightarrow{x\to 0} \frac{2}{3} m^{1/3}$$ DIPENDE DA m!

$\nexists$ limite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,mx) = \frac{1}{3} m^{-2/3}$$ ← DIPENDE DA m !!

ESERCIZI SUI LIMITI

(a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{x^3y^2}}{x^6+y^4} = \boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^3y^2}{x^6+y^4}}$$

(SE ESISTE) PERCHÉ (*) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{x^3y^2}}{x^3y^2} = -1$$

⇐ COMPOSIZIONE DEL LIMITE NOTEVOLE $\lim_{t\to 0} \frac{1-e^t}{t} = -1$

$+$ $t = x^3y^2$ $\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^3y^2 = 0\right)$

$\circledast$ = metto $y = mx$ trovo

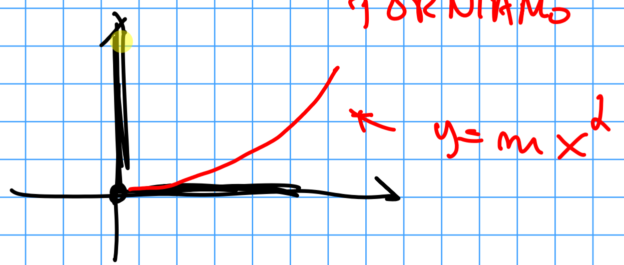
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 m^2 x^2}{x^6 + m^4 x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2 x}{x^2 + m^4} = 0$$

(NON DIPENDE DA $m$ – PERÒ NON BASTA!)

PASSIAMO IN COORDINATE POLARI

$$f(\rho, \theta) = \frac{\rho^5 \cos^3(\theta)\sin^2(\theta)}{\rho^6 \cos^6(\theta) + \rho^4 \sin^4(\theta)} = \frac{\rho \cos^3(\theta)\sin^2(\theta)}{\rho^2 \cos^6(\theta) + \sin^4(\theta)}$$

TORNIAMO IN $(x, y)$ ??




PROVIAMO CON $y = m x^{\alpha}$ $\alpha > 1$

$$f(x, mx^2) = \frac{x^3 m^{2\alpha} x^{2\alpha}}{x^6 + m^4 x^{4\alpha}}$$

PRENDO $6 = 4\alpha$ cioè $\alpha = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$

$$f(x, m x^{3/2}) = \frac{x^3 m^3 x^3}{(1+m^4)x^6} = \frac{m^3}{1+m^4} \leftarrow \text{DIPENDE DA } m!$$

$\nexists$ LIMITE

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-1)^4}{x^2+y^2+2(1-x-y)}$$

CAMBIO DI VARIABILE $x = 1+k$ $y = 1+h$

$\Downarrow$

$$\lim_{(k,h)\to(0,0)} \frac{h^4}{(1+k)^2+(1+h)^2+2(1-1-k-1-h)} =$$

$$\lim_{(k,h)\to(0,0)} \frac{h^4}{(1+2k+k^2)+(1+2h+h^2)-2-2k-2h}$$

$$\lim_{(k,h)\to(0,0)} \frac{h^4}{k^2+h^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4 \sin(\theta)}{\rho^2} \Rightarrow = \lim_{\rho\to 0} \rho^2 \sin(\theta) = 0$$

$h = \rho \sin(\theta)$ $k = \rho\cos\theta$ | $\rho^2 \to 0$ $|\sin(\theta)| \le 1$

(CONTRO) ESEMPIO L'IPOTESI DEL TEOR. DIFF. TOTALE È SUFFICIENTE MA NON NECESSARIA (PER LA DIFFERENZIABILITÀ)

$$f(x,y) = x\sqrt[3]{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt[3]{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}\, x\, y^{-\frac{2}{3}}$$

NON ESISTE SE $x \neq 0$, $y = 0$

PERALTRO

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \sqrt[3]{y}\Big|_{y=0} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

DICO CHE $\exists\, df(\vec{0})$ ( se ciò è vero $df(\vec{0}) = 0$

e quindi devo dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0 \iff \text{in coordinate polari}$$

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{\rho \cos(\theta)\, \rho^{1/3} \sin^{1/3}(\theta)}{\rho} = \lim_{\rho \to \infty} \rho^{1/3} \cos(\theta) \sin^{1/3}(\theta)$$

$$= 0$$