Analisi Matematica II

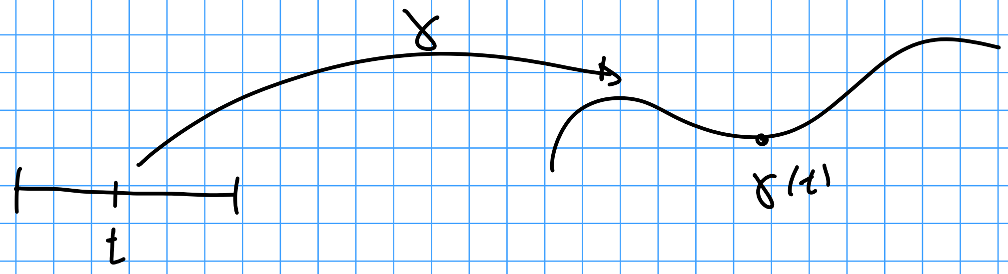
prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 3, 2 ottobre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

CURVA: $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ dove I intervallo

TALE CHE γ è continua



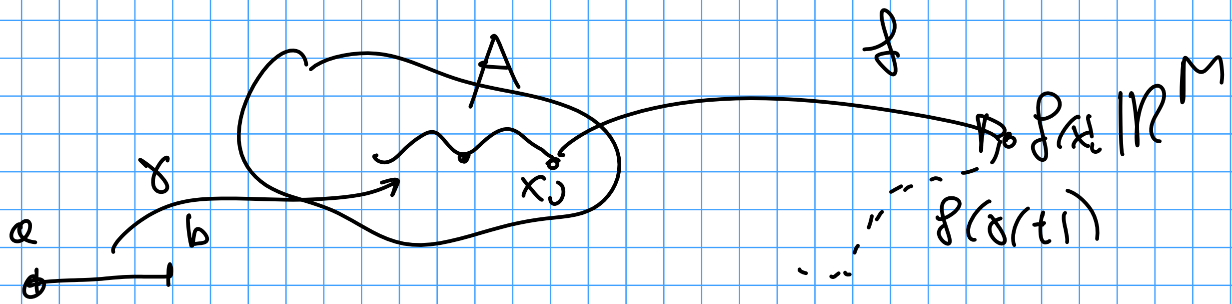
SUPPORTO DI γ = $\{\gamma(t) : t \in I\}$

Da quanto detto, si ha:

Sia $f : A \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathbb{R}^N$ $x_0 \in A$.

Se f è continua in x_0

Se $\gamma : [a, b] \to A$ curva con $\gamma(a) = x_0$



Allora $\lim_{t \to a} f(\gamma(t)) = f(x_0) \quad (= f(\gamma(a)))$

CONSEGUENZA DEL TEOR. SULLA COMPOSIZIONE DI funzioni continue

<u>NECESSARIA</u> PER LA CONTINUITÀ DI f IN x_0

PERÒ CONOSCERE IL COMPORTAMENTO DI $f(\gamma)$ su tutte le rette $\not\Rightarrow$ continuità di f in x_0

<u>ESEMPIO</u> $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$; $f(0,0) = 0$

Se guardo il comportamento di f sulle rette che escono da $(0,0)$, trovo

$f(x, mx)$ $\quad m \in \mathbb{R}$ fissato (non considero la retta $x=0$)

$$\| $$

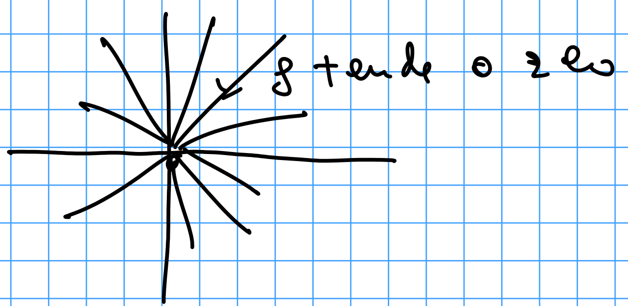
$$\frac{m x^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{m x}{x^2 + m^2} \quad \begin{cases} \to 0 & \text{se } x \to 0 \text{ e se } m \neq 0 \\ = 0 & \text{se } m = 0 \end{cases}$$

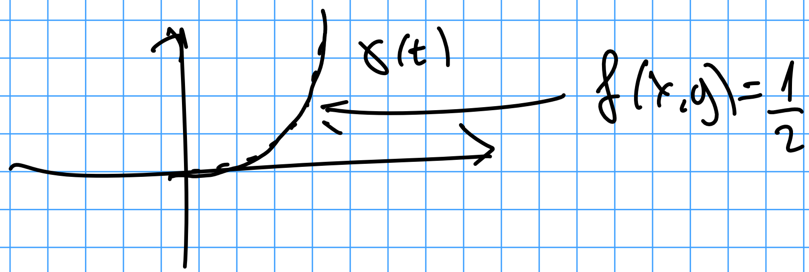
$f(0, y) = 0 \quad \forall y$

$\Rightarrow \quad f(x,y) \to 0$ se $(x,y) \to (0,0)$ <u>SU UNA RETTA</u>

(cioè, per ogni γ che descrive una retta uscente da $(0,0)$ $\Rightarrow$ $f(\gamma(t)) \to 0$ se $t \to 0$)

PERÒ NON È VERO CHE $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$





Consideriamo infatti $\gamma(t) = (t, t^2)$

$$f(\gamma(t)) = \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2} \not\to 0 \quad \text{se } t \to 0$$

SE PASSO IN COORDINATE POLARI

$$\frac{\rho^2 \cos^2\theta \; \rho \sin\theta}{\rho^4 \cos^4(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta)} = \frac{\rho \cos^2\theta \sin\theta}{\rho^2 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}$$

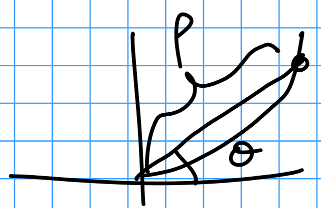
VEDO CHE – PER θ FISSATO – $f(\rho, \theta) \xrightarrow{\rho \to 0} 0$

PERÒ NON RIESCO A TROVARE

$$\frac{\rho \cos^2\theta \sin\theta}{\rho^2 \cos^2(\theta) + \sin^2\theta} \leq \text{costante } \rho$$

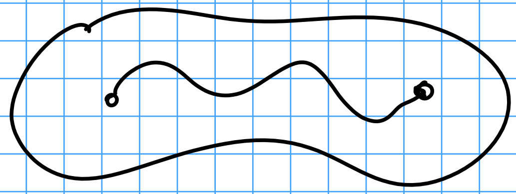
(A CAUSA DELLA PARABOLA DI PRIMA)

SI POTREBBE ANCHE QUI SCEGLIERE

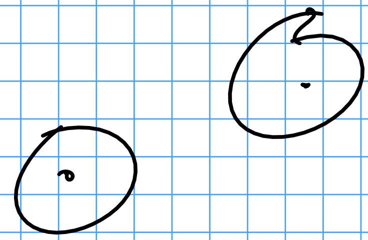
$\theta(\rho)$  $\Rightarrow f(\rho, \theta(\rho)) = \frac{1}{2}$

DEF- $A \subset \mathbb{R}^N$ DICO CHE A È CONNESSO (PER ARCHI) SE PER OGNI COPPIA $x, y \in A$ esiste una curva (continua) $\gamma : [a,b] \to A$ tale che

$\gamma(a) = x \qquad \gamma(b)\ y$



CONNESSO



NON CONNESSO

TEOREMA Se A è connesso, se $f : A \to \mathbb{R}$ è continua se $x_1, x_2 \in A$ sono tali che

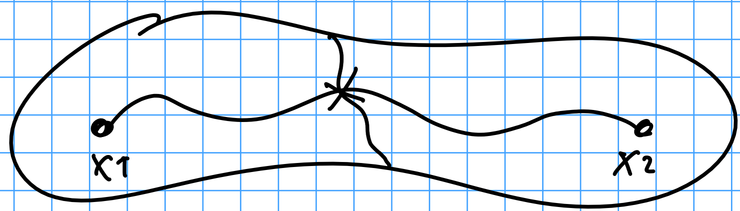
$$f(x_1) < 0 \qquad f(x_2) > 0$$

$\Rightarrow$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = 0$

ANZI per ogni curva $\gamma : [a,b] \to A$, tale che

$$\gamma(a) = x_1 \quad \gamma(b) = x_2$$

$\Rightarrow$ esiste $t \in [a,b]$ t.c. $f(\gamma(t)) = 0$

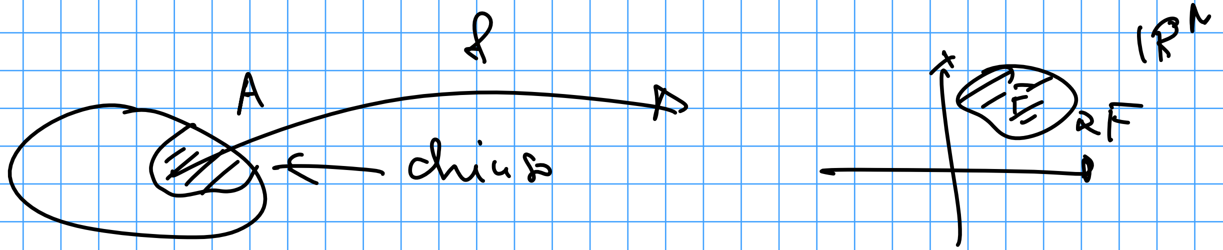


DIM. Basta applicare il teorema degli zeri a

$f(\gamma(t)) : [0,b] \to \mathbb{R}$

SI POSSONO DIMOSTRARE I FATTI SEGUENTI

- Se $f : A \to \mathbb{R}^M$ continua e A è chiuso, allora per ogni chiuso in $\mathbb{R}^M$ la controimmagine $f^{-1}(F)$ è chiuso in $\mathbb{R}^N$



NON VALE PERÒ CHE E chiuso $\Rightarrow$ $f(E)$ chiuso

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \arctan(x)$

$\mathbb{R}$ è chiuso $\quad f(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ è aperto

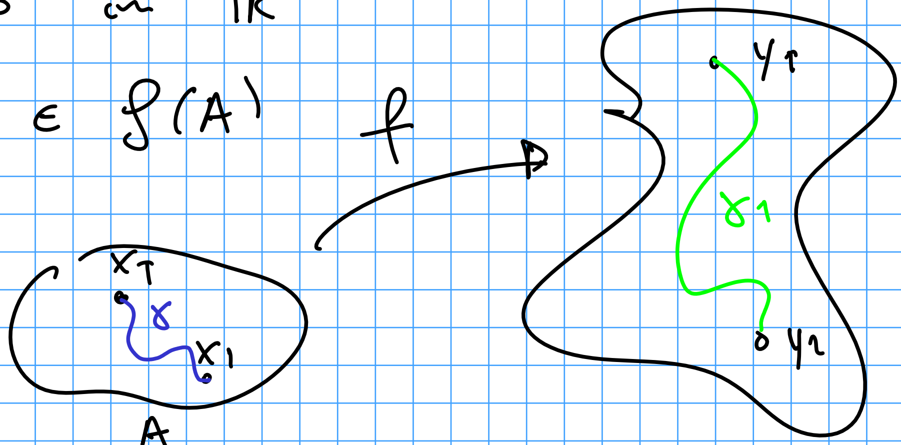
- Se A è aperto, $f : A \to \mathbb{R}^M$ è continua e se F è aperto in $\mathbb{R}^M$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(F)$ è aperto in $\mathbb{R}^N$

- Se $f : A \to \mathbb{R}^M$ e se A è connesso $\Rightarrow$ $f(A)$ è connesso in $\mathbb{R}^M$

<u>Dim</u> Prendo y_1 e $y_2 \in f(A)$

$\Downarrow$

$\exists\, x_1, x_2$ in A tali che $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$



$\Rightarrow$ TROVO $\gamma : [a, b] \to A$ con $\gamma(a) = x_1$, $\gamma(b) = x_2$

Se $\gamma_1(t) = f(\gamma(t)) \Rightarrow \gamma_1 : [a, b] \to f(A)$

γ_1 è una curva in $f(A)$ che congiunge y_1 e y_2

IL TEOREMA DEGLI ZERI È UNA CONSEGUENZA DI QUEST'ULTIMO RISULTATO

VALGONO ANCHE LE SEG. PROPRIETÀ

- UNIONE DI UN NUMERO FINITO O INFINITO DI APERTO È UN INSIEME APERTO

- INTERSEZIONE FINITO o INFINITA DI CHIUSI È CHIUSO (PUÒ ESSERE ϕ)
- UNIONE FINITA DI CHIUSI È CHIUSO
- INTERSEZIONE FINITA DI APERTI È APERTO

CONTROESEMPIO Se $A_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ APERTI

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$ NON È APERTO

DERIVATE ?? per funzioni di più variabili ??

Per esempio $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

DEFINISCO LE DERIVATE PARZIALI

Sia $x_0 = (x_{0,1}, \dots x_{0,N})$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) =$$ (se esiste)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_{0,1} \dots x_{0,i}+h \dots x_{0,N}) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,N})}{h}$$

derivata di $t \mapsto f(x_{0,1}, \dots, \underset{\uparrow}{t}, \dots, x_{0,N})$ nel punto $t = x_{0,i}$

POSTO i-ESIMO

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\,\hat{e}_i) - f(x_0)}{h}$$

dove $\hat{e}_i = (0 \dots \underset{\uparrow}{1} \dots 0)$

POSTO i-ESIMO

Per esempio - se $f(x,y) = x\,y^2$

allora $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$

PURTROPPO L'ESISTENZA DELLE DERIVATE PARZIALI IN (x_0, y_0) $\not\Longrightarrow$ CONTINUITÀ DI f IN (x_0, y_0)

LA FUNZIONE DI PRIMA: $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ (0 in (0,0))

$f(x,0) = 0$, $f(0,y) = 0 \Longrightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

(MA f NON È CONTINUA IN (0,0))

FACCIAMO UNA DEFINIZIONE PIÙ GENERALE

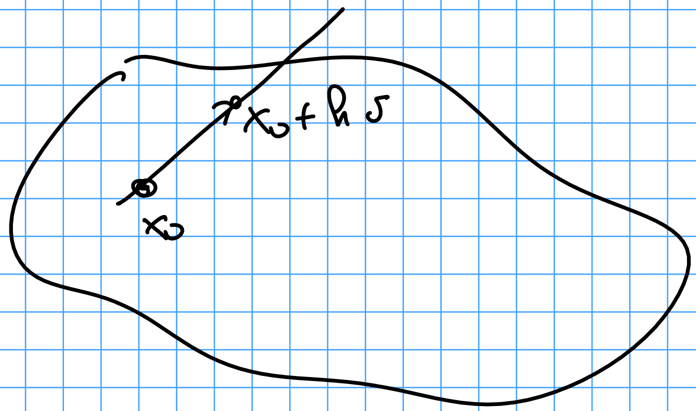
<u>DERIVATA DIREZIONALE</u> Suppongo che $f : A \to \mathbb{R}$

x_0 interno ad A. Prendo $v \in \mathbb{R}^N$

Definisco

$$f'(x_0)(v) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

la derivata di f in x_0 nella direzione v



$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = f'(x_0)(\hat{e}_i) \right)$$

SI PUÒ VEDERE CHE NEANCHE L'ESISTENZA DI TUTTE LE DERIVATE DIREZIONALI BASTA A GARANTIRE LA CONTINUITÀ DI f

PROVIAMO A VEDERE LA SOLITA $f(x,y)=\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$

FISSO $v=(a,b)$

$$f(0+hv)=f(ah,bh)=g(h)$$

e $\quad f'(0)(v)=g'(0)$

$$g(h)=\frac{a^2bh^3}{a^4h^4+b^2h^2}=\frac{a^2bh}{a^4h^2+b^2}$$

$$g'(0)=\frac{a^2b\cdot(a^4h^2+b^2)-a^2bh(2ha^4)}{(a^4h^2+b^2)^2}\xrightarrow{h=0}\frac{a^2b}{b^2}$$

$$=\frac{a^2}{b} \quad \text{se } b\neq 0$$

$g'(0)=0$ se $b=0$ (perché $g(h)=0 \ \forall h$)

DUNQUE $f'(0)v$ esiste $\forall v$ $\quad v=(v_1,v_2)$

$$f'(0)(v)=\begin{cases}0 & \text{se } v_2=0\\ \dfrac{v_1^2}{v_2} & \text{se } v_2\neq 0\end{cases}$$

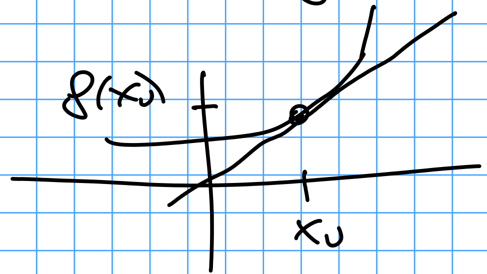
($f'(0)(v)$ esiste $\forall v$ ma f non è continua in $(0,0)$)

IN UNA VARIABILE VALE :

Esiste $f'(x_0) \iff$ esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che :

$$f(x) = f(x_0) + m(x-x_0) + o(|x-x_0|)$$

$\iff$ esiste la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$



(in una variabile i due punti di vista si confondono)

DEF (differenziabile) $\quad f: A \to \mathbb{R}$

Dico che f è differenziabile in x_0 se esiste

$\alpha : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{LINEARE}}$ tale che :

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) + o(|x-x_0|)$$ e cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

IN QUESTO CASO CHIAMO (IPER)PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI f il grafico di

$$y = \alpha(x - x_0) + f(x_0)$$

DICO ANCHE CHE α è "UN" DIFFERENZIALE PER f IN x_0.

<u>TEOREMA</u> Se c'è un differenziale α per f in x_0

ALLORA $\exists \; f'(x_0)(v) = \alpha \cdot v$

<u>DIM.</u> Se α è un differenziale

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

Dato $v \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$ prendiamo $x = x_0 + tv$

$$f(x_0 + tv) = f(x_0) + t\,\alpha(v) + o(t|v|)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = \alpha(v) + \underbrace{\frac{\sigma(t|v|)}{t}}_{\downarrow 0 \text{ se } t \to 0}$$

$\Downarrow$ mando $t \to 0$

$$f'(x_0)(v) = \alpha(v)$$ ($\alpha(v)$ è determinato univocam. da v)

CONSEGUENZE • C'È AL PIÙ UN α TRA I DIFFERENZIALE. POSSO ALLORA DIRE CHE (SE α ESISTE) α È IL DIFFERENZIALE e LO INDICO CON $df(x_0)$

(e si ha $f'(x_0)(v) = df(x_0)(v)$)

• DATO CHE se $\alpha : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è lineare, allora esiste $w \in \mathbb{R}^N$ tale che $\alpha(v) = w \cdot v$

$$\alpha(v) = \alpha(v_1 \dots v_N) = w_1 v_1 + \dots + w_N \cdot v_N$$

$$w \cdot v \quad \text{dove } w = (w_1 \dots w_N)$$

ALLORA LA DIFFERENZIABILITÀ DIVENTA:

f è diff. in x_0 se esiste un vettore w_0 tale che $f(x) = f(x_0) + w_0 \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$

w_0 è unico (se c'è!) e si chiama "gradiente" di f in x_0, e lo si indica con $\nabla f(x_0)$

- L'ESISTENZA DEL GRADIENTE IMPLICA CHE IL PIANO

$$\boxed{y = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

è tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

$\Rightarrow$ $(\nabla f(x_0), -1)$ è la direzione ortogonale al piano tangente $\quad (y_0 = f(x_0))$

$$\nabla f(x_0)(x - x_0) + (y - y_0) \cdot (-1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\underbrace{\nabla f(x_0), -1}_{\text{DIREZIONE ORTOGONALE AL PIANO}}) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$