Analisi Matematica II

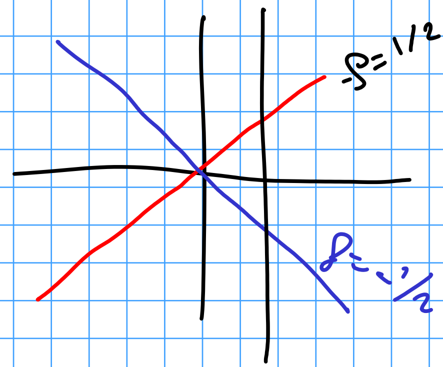
prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 2, 1 ottobre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ ← $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$x=y \Rightarrow f(x,x) = \frac{1}{2}$



NOTA $-\frac{1}{2} \le f(x,y) \le \frac{1}{2}$

per vederlo posso usare $|ab| \le \frac{a^2+b^2}{2}$

se $|ab| = ab \Rightarrow 2ab \le a^2+b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$

$|ab| = -ab \Rightarrow -2ab \le a^2+b^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 0$

$$\Rightarrow \quad |f(x,y)| \le \frac{|xy|}{x^2+b^2} \le \frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

ESEMPIO $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

in fatti (in generale) se $f: A \to \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell \iff \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} |f(\mathbf{x}) - \ell| = 0$$

NEL NOSTRO CASO VOGLIO DIM. CHE

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} |f(x,y)| = 0$$

$$\Uparrow$$

$$\underbrace{x \; \frac{xy}{x^2+y^2}}_{f(x,y)}$$

dove $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ e $\left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ } IL PRODOTTO TENDE A ZERO

VEDIAMO LO STESSO RISULTATO USANDO LE COORDINATE POLARE

$x = \rho \cos(\theta)$ con $\rho \geq 0$ $0 \leq \theta < 2\pi$

$y = \rho \sin(\theta)$

$$f(\rho, \theta) = \frac{(\rho \cos(\theta))^2 \rho \sin(\theta)}{\rho^2} = \underset{\downarrow \atop 0}{\rho} \; \underbrace{\cos^2(\theta) \sin(\theta)}_{\text{LIMITATO}}$$

$\Rightarrow \quad f(\rho, \theta) \to 0 \quad \forall \quad \rho \to 0$

$\Rightarrow \quad f(x, y) \to 0$ DATO CHE θ NON DIPENDE DA θ

SE AVESSI PRESO LA PRIMA f, cioè

$f(x, y) = \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$, passando a coordinate polari

$\Rightarrow \quad f(\rho, \theta) = \cos(\theta) \sin(\theta) = \dfrac{\sin(2\theta)}{2}$

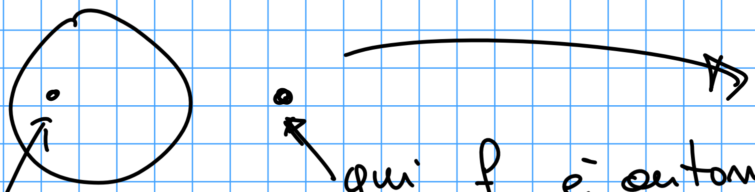
Def. (CONTINUITÀ):

$f: A \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathbb{R}^N$

$x_0 \in A$

DICO CHE f È CONTINUA IN x_0 SE

- x_0 è isolato in A
- x_0 è di accumulazione e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$



$\mathbb{R}^M$

qui f è automaticamente continua

qui $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE.

LINEARITÀ $\quad$ (f, g CONT. $\Rightarrow$ $\lambda f + \mu g$ CONT.)

PRODOTTO $\quad$ $f, g : A \to \mathbb{R}$, CONTINUE $\Rightarrow$ $f \cdot g$ CONT.

$f, g : A \to \mathbb{R}^M \Rightarrow f \circ g$ CONT.

↑ PRODOTTO SCALARE

COMPOSIZIONE $\quad$ f, g CONTINUE $\Rightarrow$ $f \circ g$ CONTINUA (SE $f \circ g$ È DEFINITA)

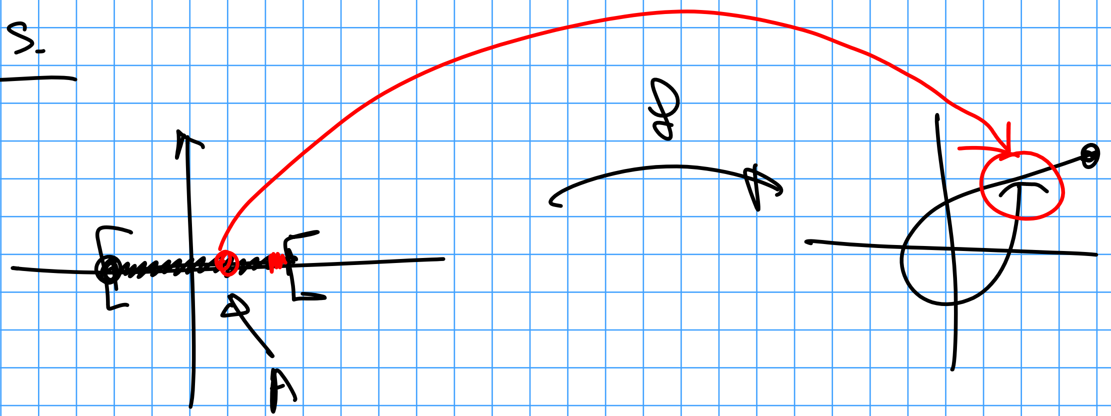
NOTA: IN UN-VARIABILE VALEVA:

$f : I \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva $\Rightarrow$

$f^{-1} : J \to I$ è continua ($J = f(I)$ INTERVALLI)

IN $\mathbb{R}^N$ NON C'È UN RISULTATO SIMILE

ES.



IN $\mathbb{R}$

f^{-1} NON È CONTINUA

SI POTREBBE DIM. CHE

TEOREMA SE A è chiuso $\subset \mathbb{R}^N$, A è limitato

($\exists R$: $A \subset B(0,R)$)

$f: A \to \mathbb{R}^N$ continua iniettiva $\Rightarrow$

Posto $B = f(A)$, la funzione $f^{-1}: B \to A$ è continua

TEOREMA (WEIERSTRASS). Se $f: A \to \mathbb{R}$

e $A \subset \mathbb{R}^N$ è un insieme <u>CHIUSO</u> e <u>LIMITATO</u>

$\Rightarrow$ esistono $\max_A f$, $\min_A f$ cioè

$\exists$ x_1 (punto di minimo) in A
$\exists$ x_2 (punto di max) in A t.c. $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

(NO DIM.)

Se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, e

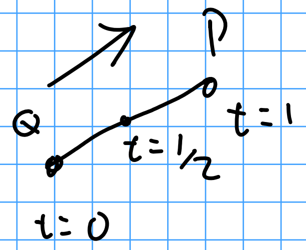
$\gamma : I \to \mathbb{R}^M$ è una funzione continua

DICO CHE γ è una <u>CURVA</u> in $\mathbb{R}^M$

L'IMMAGINE $\gamma(I)$ si chiama <u>SUPPORTO</u> della curva γ

Per es. $P, Q \in \mathbb{R}^M$ $\gamma(t) = tP + (1-t)Q$

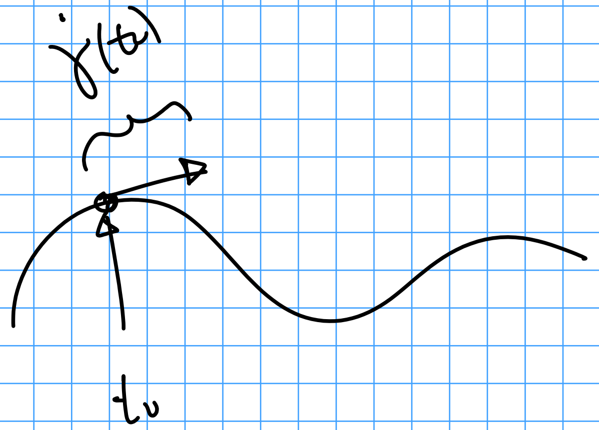
se $t \in [0,1]$ $\gamma(t)$ è il <u>segmento</u> tra P e Q



$\gamma_1(t) = tQ + (1-t)P$ è un'altra curva, che ha lo stesso supporto

<u>Def.</u> Se γ è una curva $t_0 \in I$

diremo che γ è derivabile in t_0 se $\exists \lim_{t \to t_0} \dfrac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$



$$= \dot\gamma(t_0) = \left(\gamma_1'(t_0), \dots, \gamma_n'(t_0)\right)$$