Analisi Matematica II

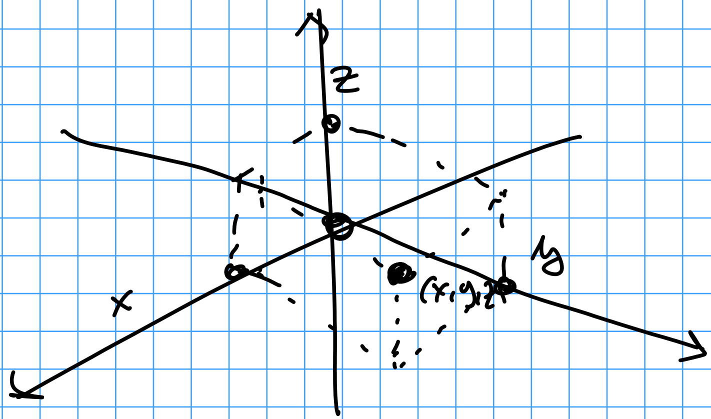
prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 01, 30 settembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

$$\mathbb{R}^N = \{ (x_1, x_2, \dots, x_N), \quad x_i \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{R}^3$



$\mathbb{R}^N$ è uno spazio vettoriale di dim N : una base è data da $e_1 \dots e_N$ dove $e_i = (0, \dots 1 \dots 0)$

posizione i-esima

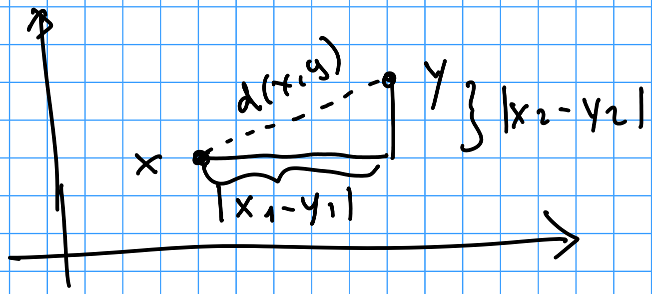
FUNZIONI DA $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

$$\boxed{f : A \to \mathbb{R}^M \quad \text{dove} \quad A \subset \mathbb{R}^N}$$

NOZIONI RIGUARDANTI LA "GEOMETRIA" DI $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

<u>DEF.</u> Dati $x = (x_1 \dots x_N)$ e $y = (y_1 \dots y_N)$ pongo

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_N-y_N)^2}$$



$N=2$

Posso anche definire

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N \quad ; \; (x \cdot x \geq 0 \quad x \cdot x = 0 \text{ se e solo se } x = 0)$$

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

e allora $d(x,y) = \|x-y\|$

DEF. Se $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $R>0$ chiamo

$B(x_0, R)$ (disco di centro x_0, raggio R)

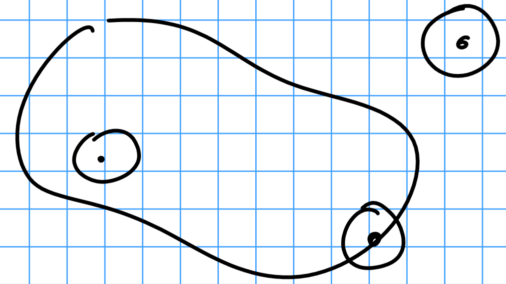
$$:= \{ x \in \mathbb{R}^N : \|x_0 - x\| < R \}$$

DEF. Dato $A \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \mathbb{R}$

DICO CHE

- x_0 è interno ad A se $\exists\, R>0$ tale che $B(x_0,R) \subset A$

- x_0 è esterno ad A se $\exists R>0$ t.c. $B(x_0,R) \cap A = \emptyset$



- x_0 è di frontiera per A se $\forall R>0$

$$B(x_0,R) \cap A \neq \emptyset, \quad B(x_0,R) \cap \complement A \neq \emptyset$$

(cioè $\exists x_1, x_2 \in B(x_0,R)$, $x_1 \in A$, $x_2 \notin A$)

NOTAZIONE:

$\mathring{A} = \{x : x \text{ INTERNO AD } A\}$ (PARTE INTERNA DI A)

$\partial A = \{x : x \text{ È DI FRONTIERA PER } A\}$ (FRONTIERA DI A)

$\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$ (CHIUSURA DI A)

$\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$

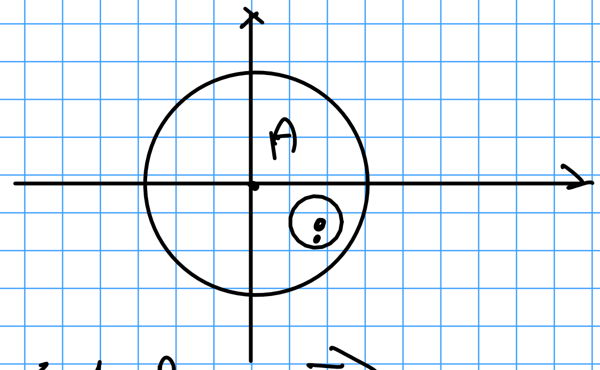
Fatti (che si verificano facilmente)

- $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$; $\overline{A} = A \cup \partial A$
- A chiuso $\Longleftrightarrow$ $\complement A$ è aperto

DICO CHE A è aperto se $A = \mathring{A}$ (tutti i punti di A sono interni)

A è chiuso se $A = \overline{A}$

ESEMPIO $\quad A = B(0,1) = \{x^2+y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$

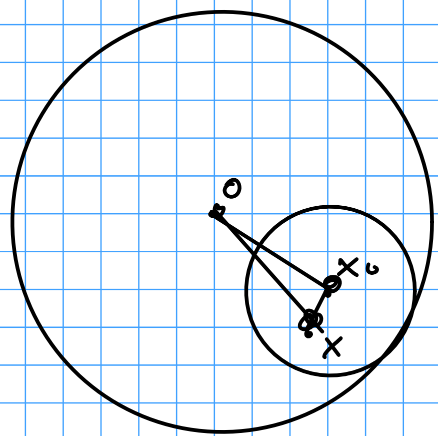


• A è aperto: se $x_0 \in A$ allora

$R = \|x_0\| < 1$. Se $\rho > 0$, $\rho < 1-R \Rightarrow$

tutti i punti x di $B(x_0,\rho)$ sono contenuti in $B(0,1)$

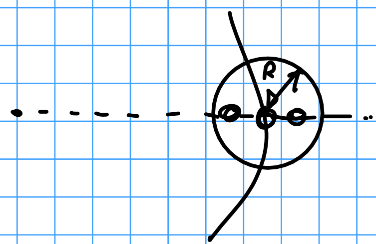
dato che $\|x\| = \|x-0\| \leq \|x-x_0\| + \|x_0-0\| < R+\rho < 1$



$\left(\Rightarrow \mathring{A} = A\right)$

• $\partial A = S := \{x : \|x\| = 1\}$. INFATTI SE

$\|x_0\| = 1$ e se $R > 0$



$x_R^+ = x_0\left(1+\frac{R}{2}\right) \Rightarrow \|x_R^+ - x_0\| = \frac{R}{2}$

$\Rightarrow x_R^+ \in B(x_0, R/2)$ e $\|x_R^+\| = 1 + \frac{R}{2} \Rightarrow x_R^+ \notin A$

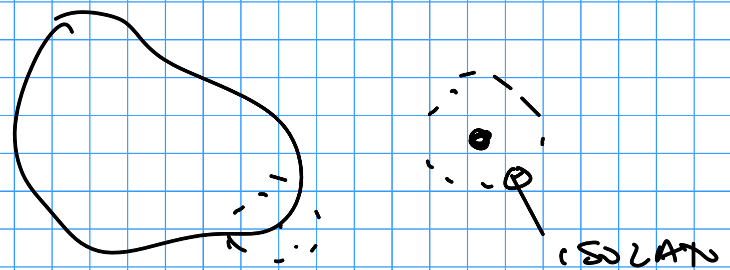
se $x_R^- = x_0\left(1 - \frac{R}{2}\right) \Rightarrow \|x_R^- - x_0\| = \frac{R}{2} \Rightarrow$

$x_R^- \in B(x_0, R)$ e $\|x_R^-\| = 1 - \frac{R}{2} < 1 \Rightarrow x_R' \in A$

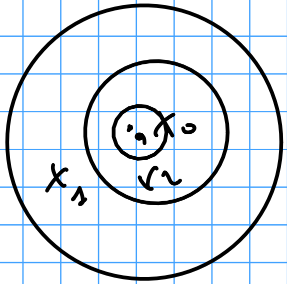
$\Rightarrow \bar{A} = \{ x : \|x\| \leq 1 \}$

<u>DEF.</u> • x_0 si dice pto di accumulazione per A se ogni disco $B(x_0, R)$ contiene un punto $x' \neq x_0$

• x_0 si dice isolato se $x_0 \in A$ ma x_0 non è di accumulazione per A, cioè tale che esiste $R > 0$ con $B(x_0, R) \cap A = \{x_0\}$



<u>NOTA</u> Se x_0 è di accumulazione allora in ogni $B(x_0, R)$ ci sono infiniti punti di A.



DEF (LIMITE DI SUCCESSIONI)

Chiamo successione in $\mathbb{R}^N$ (in A) una applicazione

$n \mapsto a_n \in \mathbb{R}^N$ (A) dove n varia in $\mathbb{N}$

DICO CHE, $\ell \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \ell \qquad (a_n \to \ell)$$

se

$$\lim_{n \to \infty} \| a_n - \ell \| = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad \forall n \geq \bar{n} \quad a_n \in B(\ell, \varepsilon)$$

FATTI) Valgono "tutte le proprietà" dei limiti (PURCHÉ ABBIANO SENSO)

- **UNICITÀ** se $a_n \to \ell_1$, $a_n \to \ell_2 \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$
- **LINEARITÀ** se $a_n \to \ell_1$, $b_n \to \ell_2$, $\lambda_n \xrightarrow{\mathbb{R}} \lambda$, $\mu_n \xrightarrow{\mathbb{R}} \mu$

  $\Rightarrow \lambda_n a_n + \mu_n b_n \to \lambda \ell_1 + \mu \ell_2$

($\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ succ. in $\mathbb{R}^N$, $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ succ. in $\mathbb{R}$)

- Se $a_n \to \ell_1$, $b_n \to \ell_2$ $\Rightarrow$ $\langle a_n, b_n \rangle \to \langle \ell_1, \ell_2 \rangle$

<u>FATTO</u> SONO EQUIVALENTI se $a_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,N})$, $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_N)$

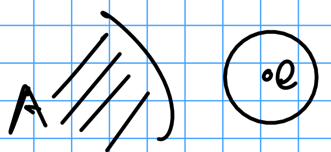
- $a_n \to \ell$
- $a_{n,i} \to \ell_i$ per $i = 1 \dots N$

(NOTA CHE $|a_{n,i} - \ell_i| \leq \| a_n - \ell \|$ e
$\| a_n - \ell \|^2 = |a_{n,1} - \ell_1|^2 + \dots + |a_{n,N} - \ell_N|^2$)

<u>FATTO</u> Se A è chiuso, $\{a_n\}$ è una successione di punti di A, se $a_n \to \ell$.

ALLORA $\ell \in A$

<u>Dim</u> So che $a_n \to \ell$, $a_n \in A$. Se $\ell \notin A$
$\Rightarrow$ ℓ esterno ad A (perché A è chiuso) $\Rightarrow$
$\exists\, \rho > 0$ tale che $B(\ell, \rho) \cap A = \emptyset$



Se $a_n \to \ell$ $\Rightarrow$ per n grande
$a_n \in B(\ell, \rho) \Rightarrow a_n \notin A$ ASSURDO

FATTI (a) $a \in \bar{A}$ se e solo se esiste una successione $\{a_n\}$ di punti di A tale che $a_n \to a$

(b) $a \in \partial A$ se e solo se ci sono $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ con $a_n \in A$, $b_n \in \complement A$ tali che $a_n \to a$, $b_n \to a$

(c) A è chiuso se e solo se per ogni succ. in A che abbia limite ℓ si ha $\ell \in A$

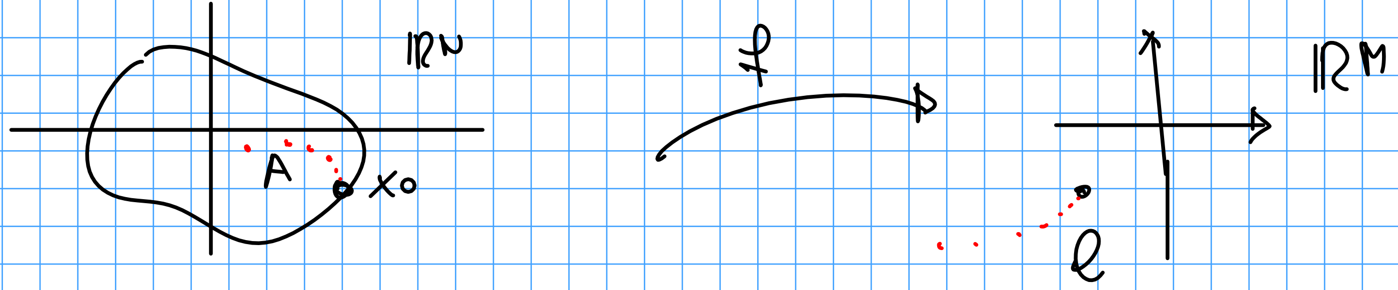
(d) x_0 è di accumulazione per A se e solo se esiste una successione $\{a_n\}$ in $A \setminus \{x_0\}$ tale che $a_n \to x_0$

($a_n \in A$, $a_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$)

DEF. Siano $f : A \to \mathbb{R}^M$. $A \subset \mathbb{R}^N$ x_0 pto di accumulaz. per A, $\ell \in \mathbb{R}^M$.

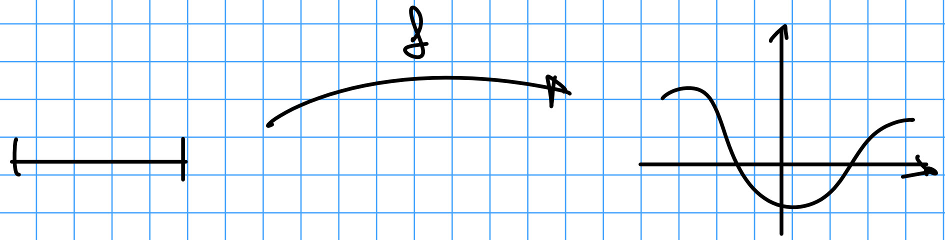
Dico che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ (scrivo anche $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$)

se per ogni successione $\{x_n\}$ in A con $x_n \neq x_0$ $\forall n$ e con $x_n \to x_0$ si ha $f(x_n) \to \ell$



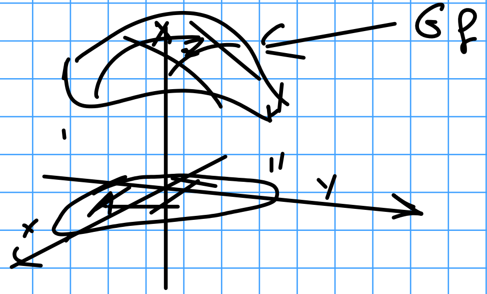
OSS. – • Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ / • $f: [a,b] \to \mathbb{R}^N$

f rappresenta "una curva" in $\mathbb{R}^N$



• Se $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^N$, posso considerare il grafico:

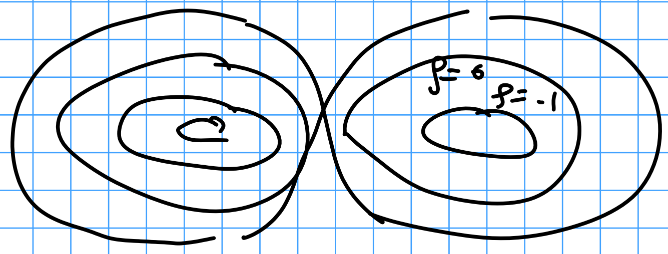
$$G_f = \{(x,y) \mid x \in A,\ y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$$



IN $\mathbb{R}^N$ sono "superfici"

Posso anche disegnare le "linee di livello"

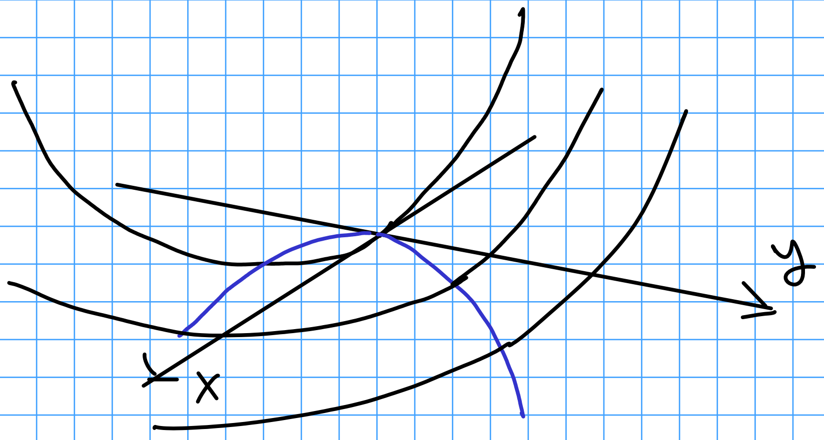
$$\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) = c\} = L_c$$

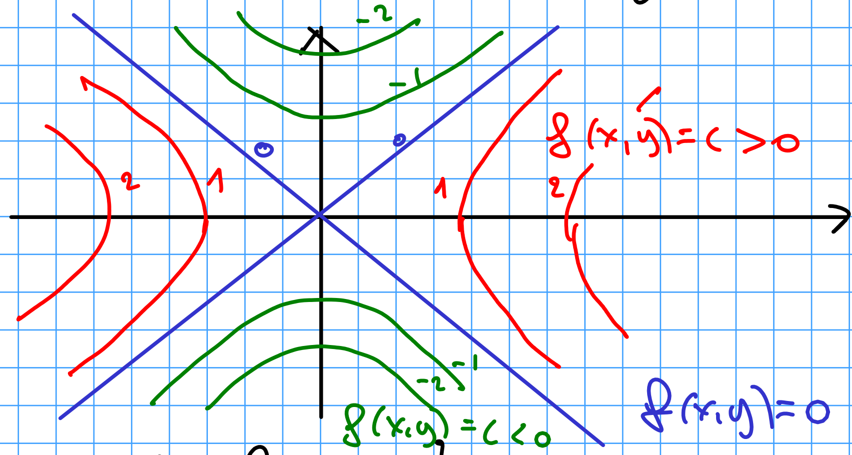


$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$f(x,0) = x^2$$

$$f(0,y) = -y^2$$





LINEE DI LIVELLO : $\{x^2 - y^2 = c\}$

$c=0 \quad x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y)=0 \quad x = y$ o $x = -y$

$c>0 \quad x^2 - y^2 = c$ è un'iperbole

$c<0 \quad x^2 - y^2 = c$ è un iperbole

TORNANDO ALLA NOZIONE DI LIMITE:

Si potrebbe anche usare ℓ_p

DEF 2 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che

$\forall x$ con $x \neq x_0$, $\|x - x_0\|_N < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_M < \varepsilon$

TEOR. LE DUE DEFINIZIONI SONO EQUIVALENTI

PROPRIETA' dei limiti

- UNICITA' DEL LIMITE
- LINEARITA' $\left(\lim_{x \to x_0} \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \lim_{x \to x_0} f(x) + \mu \lim_{x \to x_0} g \right)$

  se i limiti esistono
- COMPOSIZIONE: $\ell \in \mathbb{R}^K$, $A \subset \mathbb{R}^N$ $B \subset \mathbb{R}^M$ x_0 pto di acc. per A

  $f: A \to B$ $\quad g: B \to \mathbb{R}^K$ $\quad y_0$ pto di acc. per B

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y \to y_0} g(y) = \ell$$

$f(x) \neq y_0$ se $x \neq x_0$

ALLORA $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell$

FATTO Se $f : A \to \mathbb{R}^M \Rightarrow$

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_M(x))$$

COMPONENTI DI f

$f_i : A \to \mathbb{R}$

Allora, se $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_N)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \ell_i \quad i = 1 \dots N$$

ESEMPIO $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ def per $(x,y) \neq (0,0)$

- SE $(x_0, y_0) \neq (0,0) \Rightarrow$

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$$

PER VEDERLO POTREI DIRE:

- Se $P_1(x,y) = x$, $P_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

si ha $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} P_1(x,y) = P_1(x_0,y_0) = x_0$

(stesso discorso per $P_2(x,y) = y$)

Dim. Segue dalla dis. $|x_i - x_{0i}| \leq \|x - x_0\|$
(dalla def. di norma)

- Allora le funzioni

$(x,y) \mapsto x$
$(x,y) \mapsto y$ "passano al limite"

$\Downarrow$

$(x,y) \mapsto x \cdot y$ "passa al limite"
$(x,y) \mapsto x^2+y^2$ "passa al limite"

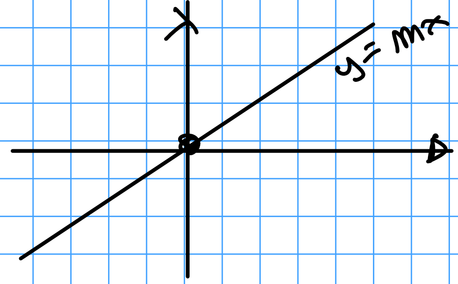
$(x,y) \mapsto \frac{x \cdot y}{x^2+y^2}$ "passa al limite" se $x_0^2+y_0^2 \neq 0$

- IN ZERO ((0,0)) $f(x,y)$ <u>NON</u> HA LIMITE

FISSATO $m \in \mathbb{R}$ considero

$\varphi(x) = f(x, mx)$

(φ è la restrizione di $f(x,y)$ alla retta $y = mx$



$x \neq 0$

$$\varphi(x) = \frac{x\,(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m\,x^2}{(1+m^2)\,x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

DIPENDE DA m

Se $x_n \to 0$, x_n sulla retta $y = m x_n$

$\Rightarrow$ $\varphi(x_n) \to \dfrac{m}{1+m^2}$ che varia al variare di m

SE $\varphi(x) \to \ell$ dovrebbe essere $\ell = \dfrac{m}{1+m^2}$ $\forall m$

impossibile