Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 41, 18 maggio 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

Prossime esercitazioni

venerdì 24 (3 h) F6

mercoledì 29 16.30 – 18.30 B11

venerdì 31 (3 h) F6

sabato 1/6 COMPITINO (B21 ore 8.30) 1 h e 1/2

SABATO 25 NON C'È LEZIONE

(E) $a y'' + b y' + c y = f(x)$ a, b, c costanti, $a \neq 0$

ABBIAMO VISTO COME TROVARE UNA SOL. PARTICOLARE $\bar{y}$

nel caso $f(x) = e^{\lambda x}$

e cioè cercare $\boxed{\bar{y}(x) = \gamma e^{\lambda x}}$ se $P(\lambda) \neq 0$

$(p(z) = az^2 + bz + c$ ← polinomio caratteristico$)$

oppure $\bar{y}(x) = \gamma x e^{\lambda x}$ se $p(\lambda) = 0$, $p'(\lambda) \neq 0$

E SE $p(\lambda) = p'(\lambda) = 0$ $\left(\text{cioè } p(z) = a(z-\lambda)^2\right)$

$\Rightarrow$ CERCO $\boxed{\bar{y}(x) = \gamma x^2 e^{\lambda x}}$

VEDIAMO SE "TORNA": calcolo le derivate di $\bar{y}$

$$\bar{y}(x) = \gamma x^2 e^{\lambda x} \Rightarrow$$

$$\bar{y}'(x) = \gamma 2x e^{\lambda x} + \gamma x^2 \lambda e^{\lambda x}$$

$$\bar{y}''(x) = \gamma 2 e^{\lambda x} + \gamma 4\lambda x e^{\lambda x} + \gamma x^2 \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Metto $\bar{y}$ nell'equazione:

$$\gamma e^{\lambda x}\left[a\left(\lambda^2 x^2 + 4\lambda x + 2\right) + b\left(\lambda x^2 + 2x\right) + c x^2\right] =$$

$$\gamma e^{\lambda x}\left[x^2\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) + 2x\left(2a\lambda + b\right) + 2a\right] =$$

$$\gamma e^{\lambda x}\Big[\, x^2 \underbrace{P(\lambda)}_{=0} + 2x \underbrace{P'(\lambda)}_{=0} + \underset{P''(\lambda)}{2a} \,\Big] = 2a\,\gamma e^{\lambda x}$$

POSSO PRENDERE $\gamma = \dfrac{1}{2a}$

PIÙ IN GENERALE POSSO CONSIDERARE

$$f(x) = Q(x)\, e^{\lambda x} \qquad Q \text{ polinomio}$$

ALLORA CERCO LA SOLUZIONE $\bar{y}(x)$ DEL TIPO

(a) Se $P(\lambda) \neq 0$ cerco $\bar{y}(x) = Q_1(x)\, e^{\lambda x}$ con Q_1 polinomio dello stesso grado di Q

(b) Se $P(\lambda) = 0$, $P'(\lambda) \neq 0$ cerco $\bar{y}(x) = Q_1(x)\, e^{\lambda x}$ con Q_1 polinomio di grado $=$ grado$(Q) + 1$

(posso supporre che Q_1 abbia termine noto $= 0$)

(c) se $p(\lambda)=0$ $p'(\lambda)=0$ cerco $\bar{y}(x) = Q_1(x)\, e^{\lambda_1 x}$ con

Q_1 polinomio di grado $=$ grado$(Q)+2$

(posso supporre che Q_1 abbia termine noto e termine in x nulli)

TUTTO QUESTO SI PUÒ FARE IN $\mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$

posso prendere $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$

ESEMPI

$$y'' - 5y' + 6y = (x^2-1)\, e^x$$

Polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - 5z + 6$, radici $z_1 = 2$, $z_2 = 3$

Sol. dell'omogenea : $y_0(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

cerco una sol. particolare:

$$\bar{y}(x) = (\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon)\, e^x$$

[NOTA CHE $P(1) \neq 0$] $\lambda = 1$

Faccio le derivate di $\bar{y}$ e le metto nell'equazione

$$\bar{y}'(x) = (2\gamma x + \delta)e^x + (\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon)e^x =$$

$$(\gamma x^2 + (2\gamma + \delta)x + \delta + \varepsilon)e^x$$

$$\bar{y}''(x) = (2\gamma x + (2\gamma + \delta))e^x + (\gamma x^2 + (2\gamma + \delta)x + \delta + \varepsilon)e^x =$$

$$(\gamma x^2 + (4\gamma + \delta)x + 2\gamma + 2\delta + \varepsilon)e^x$$

$$\bar{y}'' - 5\bar{y}' + 6\bar{y} = e^x(\gamma x^2 + (4\gamma + \delta)x + 2\gamma + 2\delta + \varepsilon$$
$$- 5\gamma x^2 - 5(2\gamma + \delta)x - 5\delta - 5\varepsilon + 6\gamma x^2 + 6\delta x + 6\varepsilon)$$

$$e^x(2\gamma x^2 + (-6\gamma + 2\delta)x + 2\gamma - 3\delta + 2\varepsilon)$$

DEVO IMPORRE

$$\begin{cases} 2\gamma = 1 \\ -6\gamma + 2\delta = 0 \\ 2\gamma - 3\delta + 2\varepsilon = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = 1/2 \\ \delta = 3\gamma = \frac{3}{2} \\ \varepsilon = -\gamma + \frac{3}{2}\delta - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{y}(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{4} e^x$$

Dunque la sol. generale dell'eq. è data da

$$y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x} + \frac{2x^2+6x+5}{4} e^x$$

Se volessi imporre una condizione iniziale: $y(0) = y'(0) = 0$

ricavo α e β $\Rightarrow$

$$y(0) = \alpha + \beta + \frac{5}{4} \quad (=0)$$

$$y'(x) = 2\alpha e^{2x} + 3\beta e^{3x} + \left(x + \frac{3}{2}\right) e^x + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\right) e^x$$

$$y'(0) = 2\alpha + 3\beta + \frac{11}{4} \quad (=0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -5/4 \\ 2\alpha + 3\beta = -\frac{11}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + \beta = -5/4 \\ \beta = -\frac{11}{4} + \frac{10}{4} = -\frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -e^{2x} - \frac{e^{3x}}{4} + \frac{2x^2+6x+5}{4} e^x$$

$$y'' - 5y' + 6y = x e^{2x}$$

$P(2)=0 \Rightarrow$ cerco $\quad (P'(2) \neq 0)$

$$\bar{y}(x) = (\gamma x^2 + \delta x) e^{2x}$$ (non occorre il termine noto)

$$\bar{y}'(x) = (2\gamma x + \delta) e^{2x} + 2(\gamma x^2 + \delta x) e^{2x} =$$

$$(2\gamma x^2 + (2\gamma + 2\delta)x + \delta) e^{2x}$$

$$\bar{y}''(x) = (4\gamma x + (2\gamma + 2\delta)) e^{2x} + 2(2\gamma x^2 + (2\gamma + 2\delta)x + \delta) e^{2x}$$

$$= (4\gamma x^2 + (8\gamma + 4\delta)x + 2\gamma + 4\delta) e^{2x}$$

$$\bar{y}'' - 5\bar{y}' + 6\bar{y} = e^{2x}\Big[(4\gamma x^2 + (8\gamma + 4\delta)x + 2\gamma + 4\delta +$$

$$-10\gamma x^2 - (10\gamma + 10\delta)x - 5\delta + 6\gamma x^2 + 6\delta x\Big] =$$

$$e^{2x}\left[0 \cdot x^2 - 2\gamma x + 2\gamma - \delta\right]$$

DEVO IMPORRE $-2\gamma = 1$, $2\gamma - \delta = 0$ $\iff$

$\gamma = -\frac{1}{2}$, $\delta = -1$ cioè

$$\bar{y}(x) = \left(-\frac{x^2}{2} - x\right) e^{2x}$$

....

CON IL METODO SOPRA TROVO SOL. (PARTICOLARI) DI

$$a y'' + b y' + c y = Q(x) \sin(\lambda x) \,/\, Q(x) \cos(\lambda x)$$

Q polinomio

NOTANDO CHE $\cos(\lambda) = \mathrm{Re}(e^{i\lambda x})$ $\sin(\lambda x) = \mathrm{Im}(e^{i\lambda x})$

O PIÙ IN GENERALE

$$a y'' + b y' + c y = Q(x) e^{\gamma x} \sin(\delta x) \,/\, Q(x) e^{\gamma x} \cos(\delta x)$$

Q polinomio

USANDO $\lambda = \gamma + i\delta$ e prendendo Im / Re della sol.

ESEMPIO

$$y'' - 5y' + 6y = \underbrace{e^{x} \sin(2x)}_{= \operatorname{Im}\left(e^{(1+2i)x}\right)}$$

(QUI $Q(x) = 1$) Prendo $\lambda = 1+2i$ e risolvo

$$y'' - 5y' + 6y = e^{(1+2i)x}$$

Per questo cerco la soluzione particolare

$$\bar{y}(x) = \gamma\, e^{(1+2i)x}$$

$$\rightsquigarrow \gamma = \frac{1}{P(1+2i)} = \frac{1}{(1+2i)^2 - 5(1+2i) + 6} =$$

$$\frac{1}{1 + 4i - 4 - 5 - 10i + 6} = \frac{1}{-2-6i}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)} = -\frac{1}{2}\,\frac{(1-3i)}{10} = \frac{1}{20}(-1+3i)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{y}(x) = \frac{1}{20}(-1+3i)\, e^{(1+2i)x} =$$

$$\frac{e^x}{20}(-1+3i)\left(\cos(2x) + i\sin(2x)\right) =$$

$$\frac{e^x}{20}\left[-\cos(2x) - 3\sin(2x) + i\left(-\sin(2x) + 3\cos(2x)\right)\right]$$

(soluzione con termine noto $e^{(1+2i)x}$)

$$\Rightarrow \quad y_1(x) = Re(\bar{y}(x)) = -\frac{e^x}{20}\left(\cos(2x) + 3\sin(2x)\right)$$

risolve $y'' - 5y' + 6y = e^x\cos(2x)$

mentre $y_2(x) = Im(\bar{y}(x)) = \frac{e^x}{20}\left(3\cos(2x) - \sin(2x)\right)$

è soluzione di $y'' - 5y' + 6y = e^x\sin(2x)$

$$y'' + y' + y = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$$

$P(\lambda) = z^2 + z + 1$ RADICI $\dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

PASSIAMO ALL'EQ.

$$v'' + v' + v = e^{\overbrace{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)}^{\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} x} \qquad \left[\operatorname{Re} e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) x} = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \right]$$

$P(\lambda) = 0$, devo cercare la sol. particolare

$$\bar{v}(x) = \gamma x e^{\lambda x}$$

$$\bar{v}'(x) = \gamma e^{\lambda x} + \gamma x \lambda e^{\lambda x}$$

$$\bar{v}''(x) = \gamma \lambda e^{\lambda x} + \gamma \lambda e^{\lambda x} + \gamma x \lambda^2 e^{\lambda x} = \gamma 2\lambda e^{\lambda x} + \gamma x \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{v}'' + \bar{v}' + v = \gamma e^{\lambda x} \left[2\lambda + \lambda^2 x + 1 + \lambda x + x \right] =$$

$$\gamma e^{\lambda x}\Big[x\underbrace{(\lambda^2+\lambda+1)}_{=0}+2\lambda+1\Big] \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{1}{2\lambda+1} = \frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1} = \frac{1}{\sqrt{3}\,i} = -\frac{i}{\sqrt{3}}$$

DUNQUE $\quad \bar{v}(x) = -\frac{i}{\sqrt{3}} x e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x} = -\frac{i}{\sqrt{3}} x e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

$$= \frac{x e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{3}}\left(\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-i\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

$\Rightarrow \quad y_1(x) = \frac{x e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ risolve

$$y''+y'+y = e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$ ← QUELLA CHE CI INTERESSA

mentre $\quad y_2(x) = -\frac{x e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ risolve

$$y''+y'+y = e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

ESERCIZIO

$$y'' + y' + y = \cos(\omega x) \qquad \text{al variare di } \omega > 0$$

$$\left(m\, y'' + a\, y' + k\, y = \cos(\omega x) \right)$$

· posso a

$$v'' + v' + v = e^{i\omega x} \qquad P(i\omega) \neq 0$$

cerco $\bar v(x) = \gamma\, e^{i\omega x} \Rightarrow \gamma = \dfrac{1}{P(i\omega)} = \dfrac{1}{(i\omega)^2 + i\omega + 1} =$

$$\frac{1}{-\omega^2 + i\omega + 1} = \frac{(1-\omega^2) - i\omega}{[(1-\omega^2) + i\omega][(1-\omega^2) - i\omega]} =$$

$$\frac{(1-\omega^2) - i\omega}{(1-\omega^2)^2 + \omega^2} = \frac{(1-\omega^2) - i\omega}{\omega^4 - \omega^2 + 1} = \gamma_\omega$$

$\Rightarrow$ la $\bar y$ sarà $Re(\bar v(x))$ cioè

$$\mathrm{Re}\left(\gamma_\omega\, e^{i\omega x}\right) = \mathrm{Re}\left(\gamma_\omega\left(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)\right)\right) =$$

$$\frac{1-\omega^2}{\omega^4-\omega^2+1}\cos(\omega x) + \frac{\omega}{\omega^4-\omega^2+1}\sin(\omega x) = \bar{y}(x)$$

VORREI SCRIVERE $\bar{y}(x) = A\cos(\omega x - \varphi)$

TORNIAMO A $\bar{\gamma}(x) = \gamma_\omega\, e^{i\omega x}$

METTIAMO γ_ω IN FORMA POLARE:

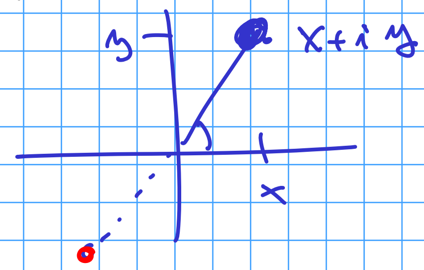
$|\gamma_\omega|$ e $\mathrm{Arg}(\gamma_\omega)$

$$|\gamma_\omega| = \left|\frac{(1-\omega^2) - i\omega}{\omega^4-\omega^2+1}\right| = \frac{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}}{\omega^4-\omega^2+1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\omega^4-\omega^2+1}} =: A_\omega$$

$$\operatorname{Arg} \gamma_\omega = \arctan \frac{\omega}{\omega^2-1} \quad (+\pi\,?) = \varphi_\omega$$

$\theta = \operatorname{Arg}(x+iy)$??



$\Rightarrow \quad \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \quad (\text{se } x \neq 0)$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi \quad \text{se} \quad x > 0$$

$$= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi + 2k\pi \quad \text{se} \quad x < 0$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad \text{se} \quad x = 0 \quad y > 0$$

$$= -\frac{\pi}{2} \quad \text{se} \quad x = 0 \quad y < 0$$

$\rightsquigarrow$ trovo $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right[$

Se dunque $\gamma_\omega = A_\omega e^{i\varphi_\omega} \Rightarrow$

$$\bar{v}(x) = \gamma_\omega e^{i\omega x} = A_\omega e^{i\varphi_\omega + i\omega x} = A_\omega e^{i(\omega x + \varphi_\omega)}$$

$$\Rightarrow \bar{y}(x) = \mathrm{Re}(\bar{v}(x)) = A_\omega \cos(\omega x + \varphi_\omega)$$

HO TROVATO CHE, se $\bar{y}(x) = \mathrm{Re}(\gamma e^{i\omega x})$

e se $\gamma = A e^{i\varphi}$ $\Rightarrow \bar{y}(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$

Tornando alla $\bar{y}(x)$ soluzione dell'eq., abbiamo trovato che

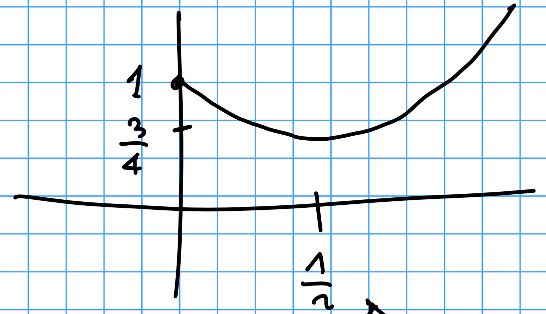
$$\bar{y}(x) = A_\omega \cos(\omega x + \varphi_\omega)$$

dove $A_\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 1}}$

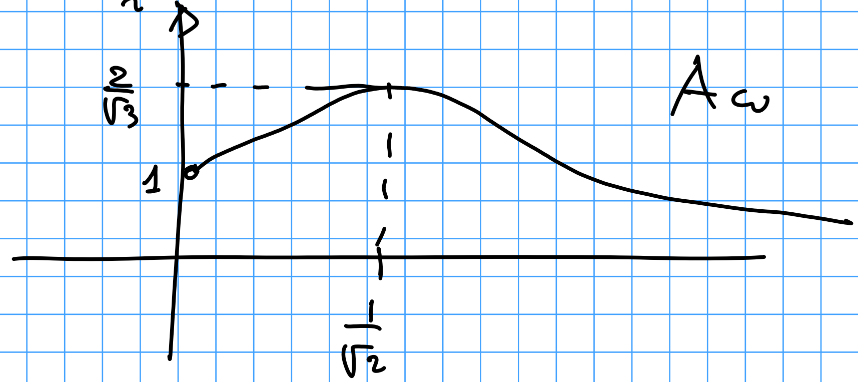
Se studio A_ω trovo "la risposta in frequenza" del sistema

Parto da $f(x) = x^2 - x + 1$ $\leftarrow$ PARABOLA CON VERTICE IN

$2x - 1 = 0 \qquad x = \frac{1}{2}$



$$A_\omega = \frac{1}{\sqrt{f(\omega^2)}} \longrightarrow$$



Si potrebbe anche guardare come varia φ_ω . . .

IN REALTA' ESISTE UNA FORMULA (PROCEDIMENTO) PER TROVARE UNA SOL. PARTICOLARE DI

$$a y'' + b y' + c y = f(x)$$

(METODO DELLA "VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE")

L'IDEA È CERCARE $\bar{y}(x) = u(x)\, y_1(x) + v(x)\, y_2(x)$

dove u, v sono due funzioni da trovare,

mentre y_1 e y_2 sono due soluzioni di $a y'' + b y' + c y = 0$.

SI PUÒ NOTARE CHE QUESTA TECNICA FUNZIONA ANCHE SE

a, b, c dipendono da x ($a(x) \neq 0$), PURCHÉ SI CONOSCANO

DUE SOL. y_1 e y_2 dell'OMOGENEA, INDIPENDENTI

Nel nostro caso $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$

radici di $P(z)$ oppure $y_1 = e^{\lambda x}$ $y_2 = x e^{\lambda x}$

QUELLO CHE SERVE È: $\forall x$ $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

DUNQUE CONSIDERIAMO

$$\bar{y}(x) = u(x)\, y_1(x) + v(x)\, y_2(x)$$

calcoliamo $\bar{y}'(x) =$

$$u'(x)\, y_1(x) + v'(x)\, y_2(x) + u(x)\, y_1'(x) + v(x)\, y_2'(x)$$

IMPONGO LA CONDIZIONE $\boxed{u'(x)\, y_1(x) + v'(x)\, y_2(x) = 0}$

Tenendo conto di questa condizione facciamo $\bar{y}''(x) =$

$$u'(x)\, y_1'(x) + v'(x)\, y_2'(x) + u(x)\, y_1''(x) + v(x)\, y_2''(x)$$

IMPONGO UN ALTRA CONDIZIONE $\boxed{u'(x)\, y_1'(x) + v'(x)\, y_2'(x) = \frac{f(x)}{a}}$

Se le due condizioni valgono $\Rightarrow$

$$a\bar{y}'' + b\bar{y}' + c\bar{y} =$$

$$a\left(\frac{f(x)}{a} + u(x)\, y_1''(x) + v(x)\, y_2''(x)\right) + b\left(u(x)\, y_1'(x) + v(x)\, y_2'(x)\right)$$

$$+ c\left(u(x)\, y_1(x) + v(x)\, y_2(x)\right) =$$

(y_1 è sol. dell'omogenea)

$$f(x) + u(x)\underbrace{\left(a y_1''(x) + b y_1'(x) + c y_1(x)\right)}_{=0} + v(x)\underbrace{\left(a y_2''(x) + b y_2'(x) + c y_2(x)\right)}_{=0} = f(x)$$

y_2 è sol. dell'omogenea

QUINDI HO TROVATO UNA SOL. PARTICOLARE SE RIESCO A RISOLVERE

$$(S)\begin{cases} u'(x)\, y_1(x) + v'(x)\, y_2(x) = 0 \\ u'(x)\, y_1'(x) + v'(x)\, y_2'(x) = \dfrac{f(x)}{a} \end{cases}$$

Per poter risolvere mi serve che

$$(*) \qquad y_1(x)\, y_2'(x) - y_2(x)\, y_1'(x) \neq 0 \quad \forall x$$

FATTO GENERALE: se y_1 e y_2 risolvono $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$

e sono INDIPENDENTI ($\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$)

$\Rightarrow$ il determinante sopra è $\neq 0 \ \forall x$.

Nei casi studiati (a, b, c costanti) $\Rightarrow$

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \quad \Big/ \text{ oppure } \quad y_1(x) = e^{\lambda x} \qquad y_2(x) = x e^{\lambda x}$$

IN QUESTI CASI SI PUÒ VERIFICARE CHE

$$(*) = e^{\lambda_1 x}\, \lambda_2 e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} = (\lambda_1 - \lambda_2)\, e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \neq 0$$

$$\left(e^{\lambda x}\left(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}\right) - \lambda e^{\lambda x}\, x\, e^{\lambda x} = e^{\lambda x} e^{\lambda x} \neq 0 \right.$$

QUINDI SI RIESCONO A RICAVARE $u'(x)$ e $v'(x)$ dal sistema (S)

PASSANDO ALLE PRIMITIVE SI RICAVANO u e v.

ULTIMO ESEMPIO (RISOLUZIONE "PER SERIE")

Voglio risolvere

$$\boxed{x\, y'' + 2y' + y = 0}$$

- NON È IN FORMA NORMALE. DIVIDO PER x $\rightarrow$

$$y'' + \frac{2}{x} y' + \frac{1}{x} y = 0$$

⇒ VALGONO I TEOREMI DI ESISTENZA su $\{x>0\}$ o su $\{x<0\}$

(NON FATTI MA ...)

- NON È A COEFF. COSTANTI NON SO COME RISOLVERLA

IDEA cerco $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (NOTA CHE CERCO SOLUZIONI DEFINITE ANCHE IN $x=0$)

Voglio trovare una successione $\{a_n\}$ per cui

(a) $y(x)$ è ben definita (la serie converge) per $\forall x$ (??).

(b) $y(x)$ verifica l'eq.

SUPPONIAMO CHE $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergente $\forall x$

$\Rightarrow$ (Proprietà delle serie di potenze)

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}, \quad x y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-1} =$$

(convergono $\forall x$)

$$x y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^n$$

METTO y nell'equazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+1}(n+1)n + 2a_{n+1}(n+1) + a_n\right] x^n = 0$$

perché valga l'eq. basta (e in realtà è necessario) che

$$a_{n+1}(n+1)(n+2) + a_n = 0 \quad \forall n$$

$$a_{n+1} = \frac{-a_n}{(n+1)(n+2)} \quad \forall n$$

DEFINISCE a_n $\forall n$, se assegno a_0

(e a_n dipende linearmente da a_0)

Posso mettere $a_0 = 1$ e definire a_n in modo che

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{-a_n}{(n+1)(n+2)} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

NOTA CHE $a_0 = y(0)$

$a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{6}$, $a_2 = +\frac{1}{6}\frac{1}{12}$, $a_3 = \frac{1}{6}\frac{1}{12}\frac{1}{20}$ ..

$\{a_n\}$ È DEFINITA. POSSO DIRE CHE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge

CERCHIAMO IL RAGGIO DI CONV.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R = +\infty}$$

QUINDI $y(x)$ esiste $\forall x$, RISOLVE L'EQ.

DUNQUE POSSO RISOLVERE (SU $\mathbb{R}$) ASSEGNANDO $y(0)$ (E NON $y'(0)$ — dall'eq. risulta da $y'(0) = -\frac{1}{6} y(0)$)