Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 40, 11 maggio 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

EQUAZIONI LINEARI DEL II° ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

$(E)\quad a y'' + b y' + c y = f(x)$ $\qquad f$ funzione continua su I intervallo

dove a, b, c costanti reali (ma anche complessi)
$a \neq 0$

NOTA: SE DIVIDO PER a posso mettere l'eq. in forma normale

FATTO VALE UN TEOR. DI ESISTENZA E UNICITÀ (SIMILE A QUELLO VISTO NEL CASO DELL'ORDINE 1)

Teorema Dato $x_0 \in I$, dati $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ esiste unica la soluzione di (E) tale che $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

(NON LO DIMOSTRIAMO $\longrightarrow$ PROSSIMO ANNO)

CERCHIAMO ORA UNA FORMULA RISOLUTIVA PER (E).

Def: Chiamo $P(z) := a z^2 + b z + c$ polinomio caratteristico dell'equazione.

Def. Chiamo equazione omogenea l'eq. quando $f=0$, cioè

$$(E_0) \qquad a y'' + b y' + c y = 0$$

IDEA: Cerco soluzioni di (E_0) del tipo $y(x) = e^{\lambda x}$ con λ numero: se metto $e^{\lambda x}$ nell'equazione $\Rightarrow$

$$a \lambda^2 e^{\lambda x} + b \lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{\lambda x} (a \lambda^2 + b \lambda + c) = 0 \iff e^{\lambda x} P(\lambda) = 0$$

$$\boxed{e^{\lambda x} \text{ risolve } (E_0) \iff P(\lambda) = 0}$$

CASO PIÙ SEMPLICE ci sono $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ radici di P. ALLORA

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \qquad \text{soluzioni}$$

$\Rightarrow \quad \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}$ è soluzione $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(STIAMO SEMPRE CONSIDERANDO E_0)

INFATTI

$$a(\alpha y_1 + \beta y_2)'' + b(\alpha y_1 + \beta y_2)' + c(\alpha y_1 + \beta y_2) =$$

$$\alpha \big(\underbrace{a y_1'' + b y_1' + c y_1}_{=0} \big) + \beta \big(\underbrace{a y_2'' + b y_2' + c y_2}_{=0} \big) = 0$$

DICO CHE $\alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}$ sono tutte e soluzioni di (E_0) (al variare di α, β in $\mathbb{R}$)

(I) Fissati $x_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ $\exists \alpha, \beta$ tali che se $y(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0$

INFATTI $\quad y(x_0) = \alpha e^{\lambda_1 x_0} + \beta e^{\lambda_2 x_0}$

$y'(x_0) \quad \alpha \lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} + \beta \lambda_2 e^{\lambda_2 x_0}$

VOGLIO CHE $\forall\ y_0, y_1$ il sistema lineare (in α, β)

$$\alpha e^{\lambda_1 x_0} + \beta e^{\lambda_2 x_0} = y_0$$
$$\alpha \lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} + \beta \lambda_2 e^{\lambda_2 x_0} = y_1$$

sia risolubile $\Longleftrightarrow$ il determinante

$$\lambda_2 e^{\lambda_1 x_0} e^{\lambda_2 x_0} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} e^{\lambda_2 x_0} \neq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Dunque le funzioni $\alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}$ "permettono di partire" da un qualunque dato iniziale.

(II) Tali funzioni sono TUTTE le soluzioni di (E_0).

INFATTI prendiamo $y(x)$ che risolve (E_0)

FISSIAMO $x_0 \in I$ e poniamo $y_0 = y(x_0)$ $y_1 = y'(x_0)$

Per il punto (I) esistono α e β tali da, se

$$\tilde{y}(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} \Rightarrow \tilde{y}(x_0) = y_0 \text{ e } \tilde{y}'(x_0) = y_1$$

PER L'UNICITÀ $\tilde{y}$ DEVE ESSERE L'UNICA SOL. CON QUESTA PROPRIETÀ $\Rightarrow$ $\tilde{y}(x) = y(x)$, cioè

$$y(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}$$

ESEMPIO $\quad y'' + 5y' + 6y = 0$

Polinomio caratteristico $\quad P(z) = z^2 + 5z + 6 \rightarrow$

radici $\quad \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ le soluzioni sono $\quad y(x) = \alpha e^{-3x} + \beta e^{-2x}$

Se voglio risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema lineare in } \alpha, \beta$$

$$y(x) = \alpha e^{-3x} + \beta e^{-2x} \Rightarrow y(0) = \alpha + \beta$$

$$y'(x) = -3\alpha e^{-3x} - 2\beta e^{-2x} \Rightarrow y'(0) = -3\alpha - 2\beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = e^{-2x} - e^{-3x}}$$

CASO $P(z)$ NON HA RADICI REALI

OSSERVAZIONE TUTTO QUANTO FATTO SI PUÒ RIPETERE

Se $a, b, c \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ = numeri complessi) e $f: I \to \mathbb{C}$ (I intervallo in $\mathbb{R}$). L'EQUAZIONE

$$a y'' + b y' + c y = f(x)$$

va intesa nel senso che $y(x) = u(x) + i v(x)$ con u, v derivabili 2 volte, e pure $f(x) = g(x) + i h(x)$ (u, v, h, g funzioni reali) e vale l'equazione vale nei complessi. (INTENDENDO che $y'(x) = u'(x) + i v'(x)$

$y''(x) = u''(x) + i\, v''(x)$)

RIPETIAMO IL RAGIONAMENTO DEL I° CASO CERCANDO

$y(x) = e^{\lambda x}$ con $\boxed{\lambda \in \mathbb{C}}$. Dato che

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$$

(ricordo che $e^{\lambda x} = e^{\lambda_1 x}(\cos(\lambda_2 x) + i \sin(\lambda_2 x))$
dove $\lambda = \lambda_1 + i \lambda_2$)

con gli stessi calcoli $\rightarrow$

$y(x)$ risolve $(E_0) \iff P(\lambda) = 0$

$\iff$ se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono radici di $P(\lambda) = 0$

le soluzioni (complesse) di (E_0) sono date da

$$y(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}$$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

SUPPONIAMO ORA $a, b, c \in \mathbb{R}$ (MA P NON HA RADICI IN $\mathbb{R}$)

IN QUESTO CASO P HA DUE RADICI (NON REALI)

CONIUGATE (dato un polinomio P a coeff. reali, x_0: $P(x_0)=0$) $\Rightarrow P(\bar{x}_0)=0$

DUNQUE LE RADICI SONO $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\delta$ $\quad \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ le soluzioni in $\mathbb{C}$ sono date da

$$y(x) = \alpha \, e^{\gamma x}\left(\cos(\delta x) + i \sin(\delta x)\right) + \beta \, e^{\gamma x}\left(\cos(\delta x) - i \sin(\delta x)\right) = \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\alpha'} e^{\gamma x}\cos(\delta x) + \underbrace{i(\alpha-\beta)}_{\beta'} e^{\gamma x}\sin(\delta x)$$

$$= \boxed{\alpha' e^{\gamma x}\cos(\delta x) + \beta' e^{\gamma x}\sin(\delta x) \qquad \alpha', \beta' \in \mathbb{C}}$$

(perché dato $\alpha', \beta' \in \mathbb{C}$ $\exists$ unici α, β tali che $\alpha+\beta=\alpha'$ $i(\alpha-\beta)=\beta'$)

SE MI LIMITO A α', β' IN $\mathbb{R}$ TROVO TUTTE E SOLE LE SOLUZIONI REALI

RIASSUMENDO: Se $P(z)=0$ HA RADICI

$$\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\,\delta$$

LE SOLUZIONI DI (E_0) SONO DATE DA

$$y(x) = \alpha\, e^{\gamma x} \cos(\delta x) + \beta\, e^{\gamma x} \sin(\delta x) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO $\quad y'' + y = 0 \quad$ (MOTO ARMONICO:

$$m\, y'' = -k\, y$$

$$y'' + \frac{k}{m}\, y = 0 \qquad \text{HO MESSO } \frac{k}{m} = 1)$$

POLINOMIO CARATTERISTICO: $P(z) = z^2 + 1$

RADICI $\pm i$ $\Rightarrow$ soluzioni complesse $y(x) = \alpha\, e^{ix} + \beta\, e^{-ix}$

$$= \alpha\,(\cos(x) + i \sin(x)) + \beta\,(\cos(x) - i \sin(x)) =$$

$$\alpha' \cos(x) + \beta' \sin(x) = A \cos(x - \varphi)$$

ESEMPIO II

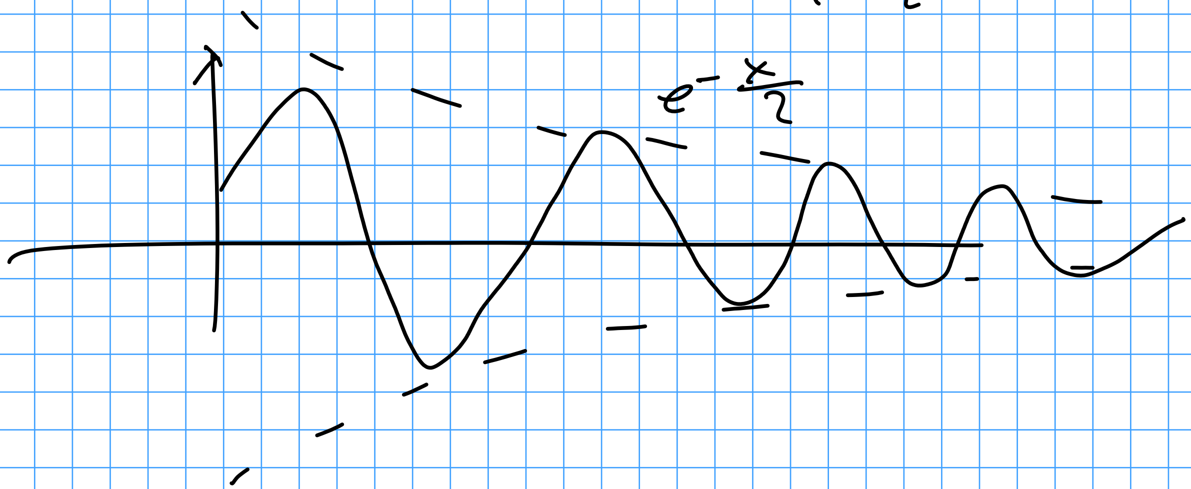
$$y'' + y' + y = 0 \qquad \Big(y'' = -y - \underset{\text{resistenza}}{y'} \Big)$$

$P(z) = z^2 + z + 1$ RADICI $\dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \alpha e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) =$$

$$e^{-\frac{x}{2}} \quad A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \varphi\right)$$

SMORZAMENTO



ULTIMO CASO $\quad P$ HA UNA RADICE DI MOLTEPLICITÀ 2 cioè $\quad P(z) = \underbrace{a(z-\lambda)^2}_{a z^2+bz+c}$ (con a, λ complessi — poi però $a, \lambda \in \mathbb{R}$)

cioè $\quad \Delta \left(= b^2-4ac\right) = 0 \quad$ oppure

c'è λ tale che $\quad P(\lambda)=0, \; P'(\lambda)=0$

MI MANCA UNA FAMIGLIA DI SOLUZIONI

PRIMA C'ERA $\quad \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} \quad$ (se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)

$$= (\alpha+\beta) e^{\lambda x} \sim \alpha e^{\lambda x}$$

IDEA $\quad$ CONSIDERO: $\quad x e^{\lambda x} \rightarrow$ PROVIAMO A METTERLA NELL'EQUAZ.

$$a \frac{d^2}{dx^2}\left(x e^{\lambda x}\right) + b \frac{d}{dx}\left(x e^{\lambda x}\right) + c x e^{\lambda x} =$$

$$a \frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}\right) + b\left(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}\right) + c x e^{\lambda x} =$$

$$a\left(\lambda e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x}\right) + b\left(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}\right) + c x e^{\lambda x} =$$

$$e^{\lambda x}\left[x\left(a\lambda^2+b\lambda+c\right)+(2a\lambda+b)\right]=$$

$$e^{\lambda x}\left[x\,P(\lambda)+P'(\lambda)\right]=0 \quad \text{perché } P(\lambda)=P'(\lambda)=0$$

DUNQUE SE λ è radice doppia di P, $\Rightarrow$ Ho A DISPOSIZIONE DUE SOLUZIONI $y_1(x)=e^{\lambda x}$, $y_2(x)=xe^{\lambda x}$.

$$\Rightarrow \quad y(x)=\alpha e^{\lambda x}+\beta x e^{\lambda x} \quad \text{sono sol. di } (E_0)$$

DICO CHE IN QUESTO MODO SI TROVANO TUTTE LE SOLUZIONI.

Per farlo dimostro (come prima) che fissati x_0, y_0, y_1 posso scegliere α e β in modo che $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$

$$y(x_0)=\alpha e^{\lambda x_0}+\beta x_0 e^{\lambda x_0}$$

$$y'(x)=\alpha\lambda e^{\lambda x}+\beta e^{\lambda x}+\beta\lambda x e^{\lambda x} \Rightarrow$$

$$y'(x_0)=\alpha\lambda e^{\lambda x_0}+\beta\left(e^{\lambda x_0}+\lambda x_0 e^{\lambda x_0}\right)$$

$\Rightarrow$ SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} \alpha\, e^{\lambda x_0} + \beta\, x_0\, e^{\lambda x_0} = y_0 \\ \alpha \lambda\, e^{\lambda x_0} + \beta\, e^{\lambda x_0}(1+\lambda x_0) = y_1 \end{cases}$$

Se voglio che sia risolubile $\forall\ y_0, y_1 \Rightarrow$ determinante $\neq 0$

$$e^{\lambda x_0}\, e^{\lambda x_0}(1+\lambda x_0) - e^{\lambda x_0}\, e^{\lambda x_0}\, x_0 \lambda \neq 0$$

$$(1+\lambda x_0 - \lambda x_0) \neq 0 \qquad 1 \neq 0 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

DUNQUE SE λ è radice doppia, le soluzioni di (E_0) sono date da

$$\alpha\, e^{\lambda x} + \beta x\, e^{\lambda x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \mathbb{C}$$

<u>ESEMPIO</u>

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$P(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2 \Rightarrow \lambda = -1$ RADICE DOPPIA

$$\Rightarrow \quad y(x) = \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x}$$

RISOLVIAMO IL PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

$y(x) = \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x}$ $\qquad y(0) = \alpha$

$y'(x) = -\alpha e^{-x} + \beta e^{-x} - \beta x e^{-x}$ $\qquad y'(0) = -\alpha + \beta$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ -\alpha + \beta = -1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \quad y(x) = e^{-x}$$

PASSIAMO ALL'EQUAZIONE (E) (non omogenea)

BISOGNA TROVARE UNA SOL. DI (E) E AGGIUNGERCI TUTTE LE SOL. DI (E_0)

FATTO (a) Se y_1 e y_2 risolvono (E) $\Rightarrow$ $y_1 - y_2$ risolve (E_0)

(b) Se y_1 risolve (E) y_2 risolve (E_0) $\Rightarrow$ $y_1 + y_2$ risolve (E)

Dim. (a) So che

$$\left.\begin{aligned} a y_1'' + b y_1' + c y_1 &= f(x) \\ a y_2'' + b y_2' + c y_2 &= f(x) \end{aligned}\right\} \text{SOTTRAGGO} \Rightarrow$$

$$a(y_1 - y_2)'' + b(y_1 - y_2)' + c(y_1 - y_2) = 0$$

(b) So che

$$\left.\begin{aligned} a y_1'' + b y_1' + c y_1 &= f(x) \\ a y_2'' + b y_2' + c y_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{SOMMO} \Rightarrow$$

$$a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) = f(x)$$

TEOREMA Supponiamo che $\overline{y}(x)$ sia una soluzione di (E)

Allora $\{y : y \text{ risolve } (E)\} = \{\overline{y} + y_0 : y_0 \text{ risolve } (E_0)\}$

In altri termini:

y è soluzione di (E) $\Longleftrightarrow$ Esiste y_0 soluzione di (E_0) tale che $y(x) = \overline{y}(x) + y_0(x)$

La dim. si ottiene dalle (a) e (b) sopra. Infatti

($\Rightarrow$) Se y risolve (E) posso prendere $y_0 = y - \overline{y}$
Per (a) y_0 risolve (E_0)

($\Leftarrow$) Se y_0 risolve (E_0), uso (b) e trovo che $\overline{y} + y_0$ risolve (E)

DOBBIAMO DUNQUE TROVARE UNA SOLUZIONE DI (E).

CONSIDERIAMO DEI TERMINI NOTI PARTICOLARI

$$f(x) = e^{\lambda_0 x}$$

AMMETTIAMO $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ $a, b, c \in \mathbb{C}$. DEVO RISOLVERE

$$a y'' + b y' + c y = e^{\lambda_0 x}$$

<u>IDEA:</u> Cerco $\bar{y}(x) = \gamma e^{\lambda_0 x}$ con γ da determinare.

METTIAMO $\bar{y}$ nell'equazione $\longrightarrow$

$$\gamma a \lambda_0^2 e^{\lambda_0 x} + \gamma b \lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \gamma c e^{\lambda_0 x} = e^{\lambda_0 x}$$

$\Updownarrow$ semplifico $e^{\lambda_0 x}$

$$\gamma P(\lambda_0) = 1$$

POSSO RICAVARE $\gamma = \dfrac{1}{P(\lambda_0)}$ A PATTO CHE $P(\lambda_0) \neq 0$

<u>ESEMPIO</u>

$$y'' + y' + y = e^{x}$$

$\leftarrow$ VOGLIO TUTTE LE SOLUZIONI

PRIMA ABBIAMO VISTO CHE LE SOLUZIONI DELL'OMOGENEA

SONO
$$e^{-\frac{x}{2}}\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)+\beta\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)\right)$$

CERCO $\bar y(x)=\gamma e^{x}$ che risolva l'eq. completa

FACENDO I CALCOLI VIENE $\gamma=\frac{1}{P(1)}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ le sol. sono date da
$$\frac{e^x}{3}+e^{-\frac{x}{2}}\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)+\beta\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)\right)\qquad\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Cerchiamo la soluzione y tale che $y(0)=y'(0)=0$

Trovo le condizioni
$$\frac{1}{3}+\alpha=0\qquad(y(0)=0)$$

$$y'(x)=\frac{e^x}{3}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)\right)+e^{-\frac{x}{2}}\left(-\alpha\sin(x)+\beta\cos(x)\right)\frac{\sqrt3}{2}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta = 0 \qquad (y'(0)=0)$$

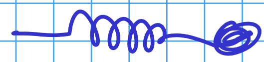
$$\boxed{\alpha = -\frac{1}{3}} \qquad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta = 0 \qquad \boxed{\beta = -1/\sqrt{3}}$$

$$y(x) = \frac{e^{x}}{3} - e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

ALTRO ESEMPIO

(*) $y'' + y' + y = \sin(x)$

(MOLLA



+ resistenza dell'aria

+ forza esterna $\sin(x)$)

NOTO CHE $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$

TRUCCO: RISOLVO $v'' + v' + v = e^{ix}$

e VERO CHE $y = \mathrm{Im}(v)$ risolve (*)

Per risolvere $v'' + v' + v = e^{ix}$

cerco $\bar{v}(x) = \gamma e^{ix} \rightsquigarrow \gamma = \frac{1}{P(i)} =$

$$\frac{1}{i^2 + i + 1} = \frac{1}{i} = -i$$

$$\bar{v}(x) = -i e^{ix} = -i \cos(x) + \sin(x)$$

SE PRENDO LA PARTE IMMAGINARIA TROVO $\bar{y}(x) = -\cos(x)$

FACCIAMO (per curiosità) LA VERIFICA CHE $\bar{y}$ risolve (*)

$$\bar{y}'' + \bar{y}' + \bar{y} = \cancel{\cos(x)} + \sin(x) - \cancel{\cos(x)} = \sin(x)$$

DUNQUE LA FAMIGLIA DELLE SOLUZIONI DI (*) E' DATA DA

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \right) - \cos(x)$$

E SE $P(\lambda_0) = 0$?? CIOÈ COSA FACCIO

SE DEVO TROVARE UNA SOL. (PARTICOLARE) DI

$$a y'' + b y' + c y = e^{\lambda_0 x} \qquad (a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c = 0)$$

CERCO

$$\bar{y}(x) = \gamma\, x e^{\lambda_0 x}$$

$$\bar{y}'(x) = \gamma\left(e^{\lambda_0 x} + x \lambda_0 e^{\lambda_0 x}\right)$$

$$\bar{y}''(x) = \gamma\left(\underbrace{\lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 e^{\lambda_0 x}}_{2\lambda_0 e^{\lambda_0 x}} + \lambda_0^2 x e^{\lambda_0 x}\right)$$

METTO NELL'EQUAZIONE

$$\gamma\left[a\left(2\lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 x e^{\lambda_0 x}\right) + b\left(e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x}\right) + c x e^{\lambda_0 x}\right] =$$

$$\gamma\, e^{\lambda_0 x}\left[x\left(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c\right) + 2\lambda_0 a + b\right] =$$

$$\gamma e^{\lambda_0 x}\Big[x \underset{\substack{\parallel\\ 0}}{P(\lambda_0)} + P'(\lambda_0)\Big] = \gamma P'(\lambda_0) e^{\lambda_0 x}$$

se $P'(\lambda_0) \neq 0$ (cioè se λ_0 È RADICE <u>SEMPLICE</u> DI P)

$$\Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{P'(\lambda_0)}$$

<u>ESEMPIO</u>

$$y'' + y = \sin(x)$$

COME PRIMA NOTO CHE $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$ e CONSIDERO

$$v'' + v = e^{ix}$$

Polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + 1$, radici $\pm i$

i è radice semplice di P $\Rightarrow$

$\bar{v}(x) = \gamma x e^{ix}$ con $\gamma = \frac{1}{P'(i)} = \frac{1}{2i}$ $\big(P'(z) = 2z\big)$

cioè $\quad \bar{v}(x) = -\frac{i}{2} x e^{ix} = -\frac{i}{2}x\left(\cos(x) + i \sin(x)\right) = -\frac{i}{2}x\cos(x) + \frac{x}{2}\sin(x)$

$\Rightarrow$ Posso considerare $\bar{y}(x) = \mathrm{Im}\left(\bar{v}(x)\right) = -\frac{x}{2}\cos(x)$

Verifico:

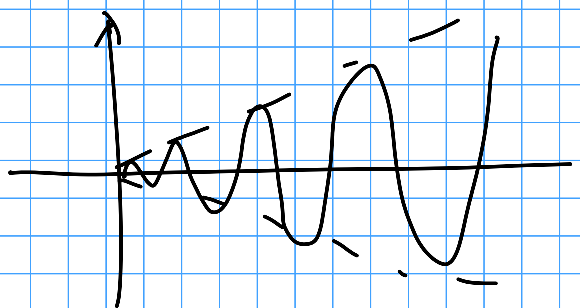
$$\bar{y}(x) = -\frac{x}{2}\cos(x)$$

$$\bar{y}'(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{x}{2}\sin(x)$$

$$\bar{y}''(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(x)}_{\sin(x)} + \frac{x}{2}\cos(x)$$

$\Rightarrow \quad \bar{y}'' + \bar{y} = \sin(x) + \frac{x}{2}\cos(x) - \frac{x}{2}\cos(x) = \sin(x) \quad$ ok.

$\Rightarrow$ La sol. generale è $-\frac{x}{2}\cos(x) + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$



$\alpha = 0 \quad \beta = 0$

(RISONANZA!)