Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 39, 10 maggio 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

PROSSIMI TRE VENERDÌ (17/24/31)

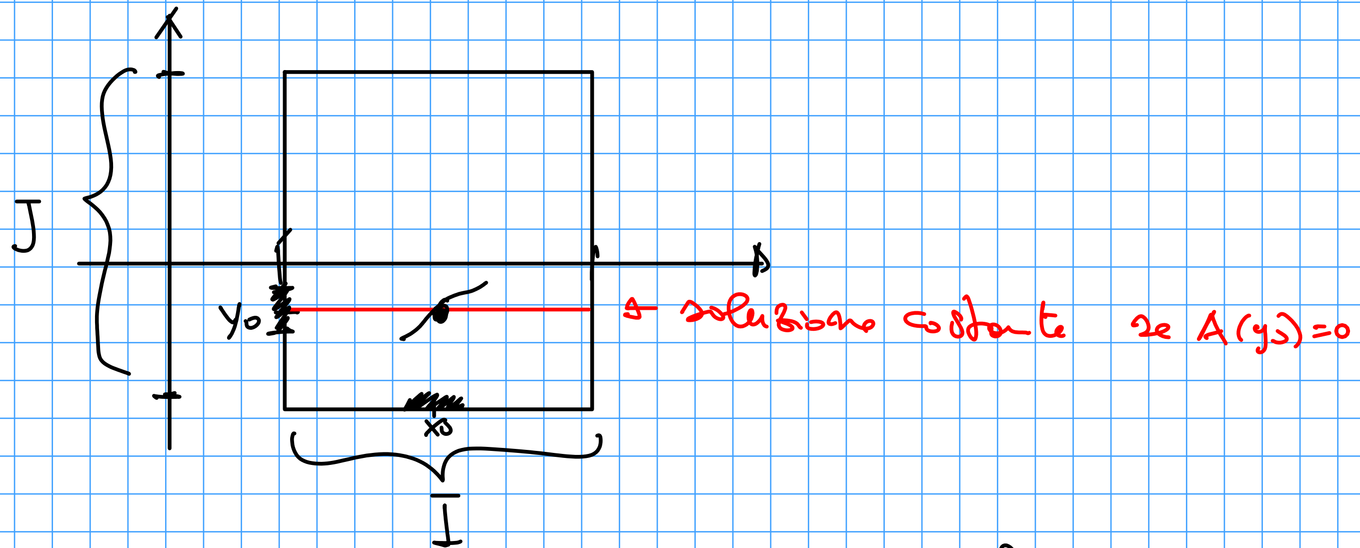
ore 13,30 - 16,30 ESERCITAZIONI

EQUAZIONI (I° ORDINE) A VARIABILI SEPARABILI

$$y' = \overbrace{A(y)\,B(x)}^{F(x,y)} \qquad (\Omega = I \times J)$$

dove $A : J \to \mathbb{R}$, $B : I \to \mathbb{R}$ continue

J, I due intervalli



FISSIAMO $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$ e cerchiamo di risolvere:

$$\begin{cases} y' = A(y)\,B(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

I° caso $\quad A(y_0) = 0 \quad$ Posso prendere $\; y(x) = y_0 \quad \forall x$

Infatti $\quad y'(x) = 0 \; = A(\underbrace{y(x)}_{y_0}) \cdot B(x)$

II° caso $\quad \boxed{A(y_0) \neq 0}$

Supponiamo (all'inizio) che $y(x)$ sia una soluzione definita in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ $\Rightarrow$ posso supporre che $A(y(x)) \neq 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 - \delta]$ (eventualmente rimpicciolisco δ). Allora posso scrivere

$$\frac{y'(x)}{A(y(x))} = B(x) \qquad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

Integro tra x_0 e un x generico in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{A(y(t))}\,dt = \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt$$

cambio di variabile $\sigma = y(t)$

$$\underbrace{\underbrace{\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{d\sigma}{A(\sigma)}}_{F(y(x))} = \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt}_{\text{CONDIZIONE "IMPLICITA" su } y(x)} \qquad d\sigma = y'(t)\,dt$$

$y(x_0) = y_0$

CONDIZIONE "IMPLICITA" su $y(x)$:

PONGO

$$F(z) = \int_{y_0}^{z} \frac{d\sigma}{A(\sigma)} \qquad G(x) = \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt$$

PRIMITIVA DI $\frac{1}{A}$ PRIMITIVA DI B

$(x-\delta < x < x_0+\delta]$

$y_0 - \varepsilon \leq z \leq y_0 + \varepsilon$

per $\varepsilon > 0$ piccolo $\left(\frac{1}{A} \neq 0 \Rightarrow F'(z) = \frac{1}{A} \neq 0 \Rightarrow F \text{ è invertibile} \right)$

$\Rightarrow$ la condizione sopra diventa

$$(*) \qquad y(x) = F^{-1}\big(G(x)\big)$$

(ben definita se $x \sim x_0$)

IN DEFINITIVA se y è soluzione $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{A(\sigma)}\,d\sigma = \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt \quad \text{per } x \sim x_0}$$

cioè (*) (se $F(z) = \int_{y_0}^{z} \frac{1}{A(\sigma)}\,d\sigma$)

VICEVERSA, se $A(y_0) \neq 0$, la formula (*) è ben definita per $x \sim x_0$, e la $y(x)$ definita da (*) risolve l'equazione per $x \sim x_0$.

VERIFICHIAMOLO: ho $y(x) = F^{-1}(G(x))$

$$y(x_0) = F^{-1}(G(x_0)) = F^{-1}(0) = y_0 \quad (\text{perché } F(y_0) = 0)$$

VALE LA COND INIZIALE

Inoltre $y'(x) = (F^{-1})'(G(x)) \cdot G'(x) =$

$$\frac{1}{F'(F^{-1}(G(x)))} B(x) \quad (\text{perché } G' = B)$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{A(\underbrace{F^{-1}(G(x))}_{y(x)})}} B(x) = A(y(x))\, B(x)$$

$\Downarrow$

y VERIFICA L'EQUAZIONE

(in un intorno di x_0)

LA $y(x)$ definita da $(*)$ esiste fino a quando la formula ha senso

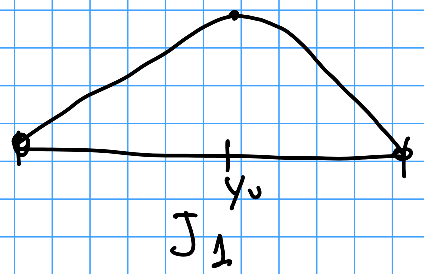
$$(*) \qquad y(x) = F^{-1}(G(x)) \quad \text{dove}$$

$$F(z) = \int_{y_0}^{z} \frac{1}{A(\sigma)}\, d\sigma \qquad G(x) = \int_{x_0}^{x} B(t)\, dt$$

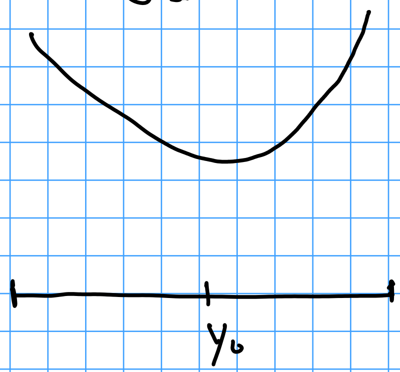
F è definita in $J_1 \subset J$ J è il massimo sottointervallo contenente y_0, per cui $A(y) \neq 0$. $\Rightarrow$ F^{-1} è definita nella immagine di J_1, cioè nell'intervallo I tale da

$A : J_1 \to \mathbb{R}$, $y_0 \in J_1$ $\qquad$ $A > 0$ su J_1

A fa zero agli estremi di J_1

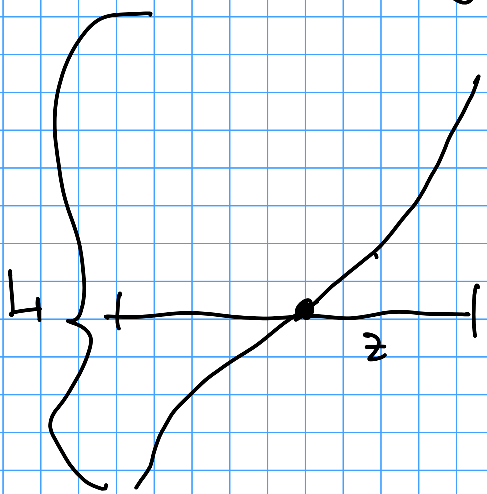


$A(y)$

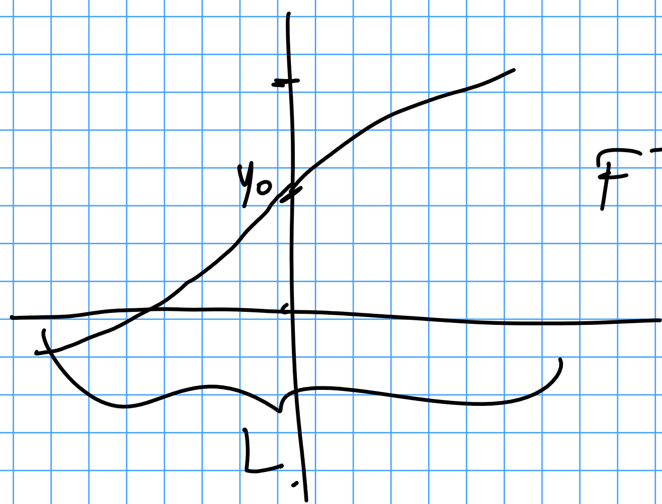


$\frac{1}{A(y)}$

$\Downarrow$ Passo a $F(z)$



$F(z)$



F^{-1}

$\Rightarrow$ $y(x)$ esiste per le x tali che $G(x) \in L$

ATTENZIONE Nel caso (b) la soluzione è unica. Però da $y(x_0) = y_0$ PUÒ PARTIRE UNA SOLUZIONE NON COSTANTE

NOTA: Può capitare che l'insieme delle x per cui definita $y(x)$ sia più piccolo di I

ESEMPI

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

QUI $A(y) = y^2$

$B(x) = 1$

$J = \mathbb{R} \qquad I = \mathbb{R}$

(I) Soluzioni costanti:

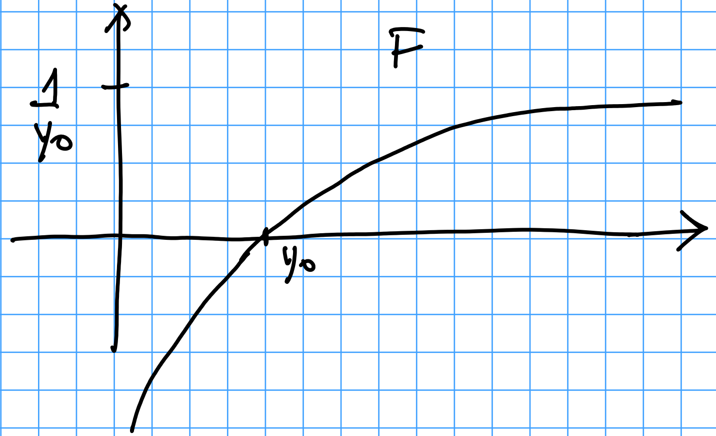
se $y_0 = 0 \Rightarrow y(x) = 0$ è soluzione

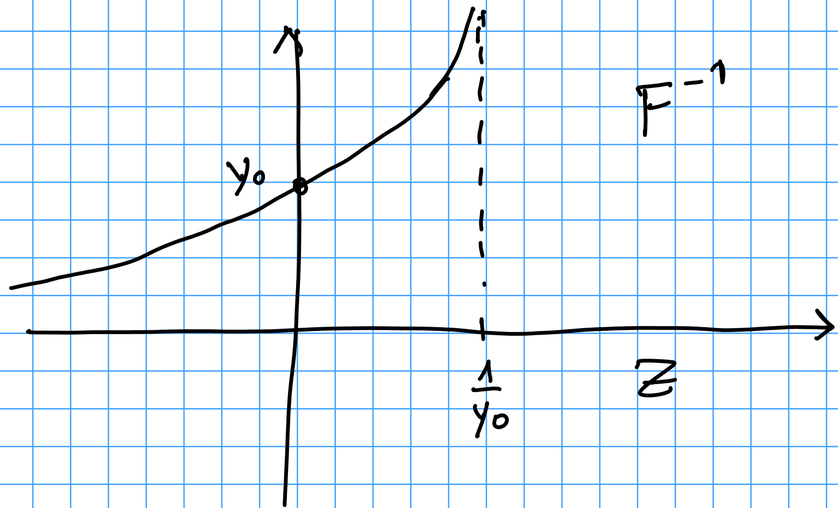
(II) $y_0 \neq 0$ Cominciamo da $y_0 > 0$

La funzione F è data da

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\sigma^2}\, d\sigma = \left[-\frac{1}{\sigma} \right]_{y_0}^{y} = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y}$$

DEFINITA PER $y > 0$



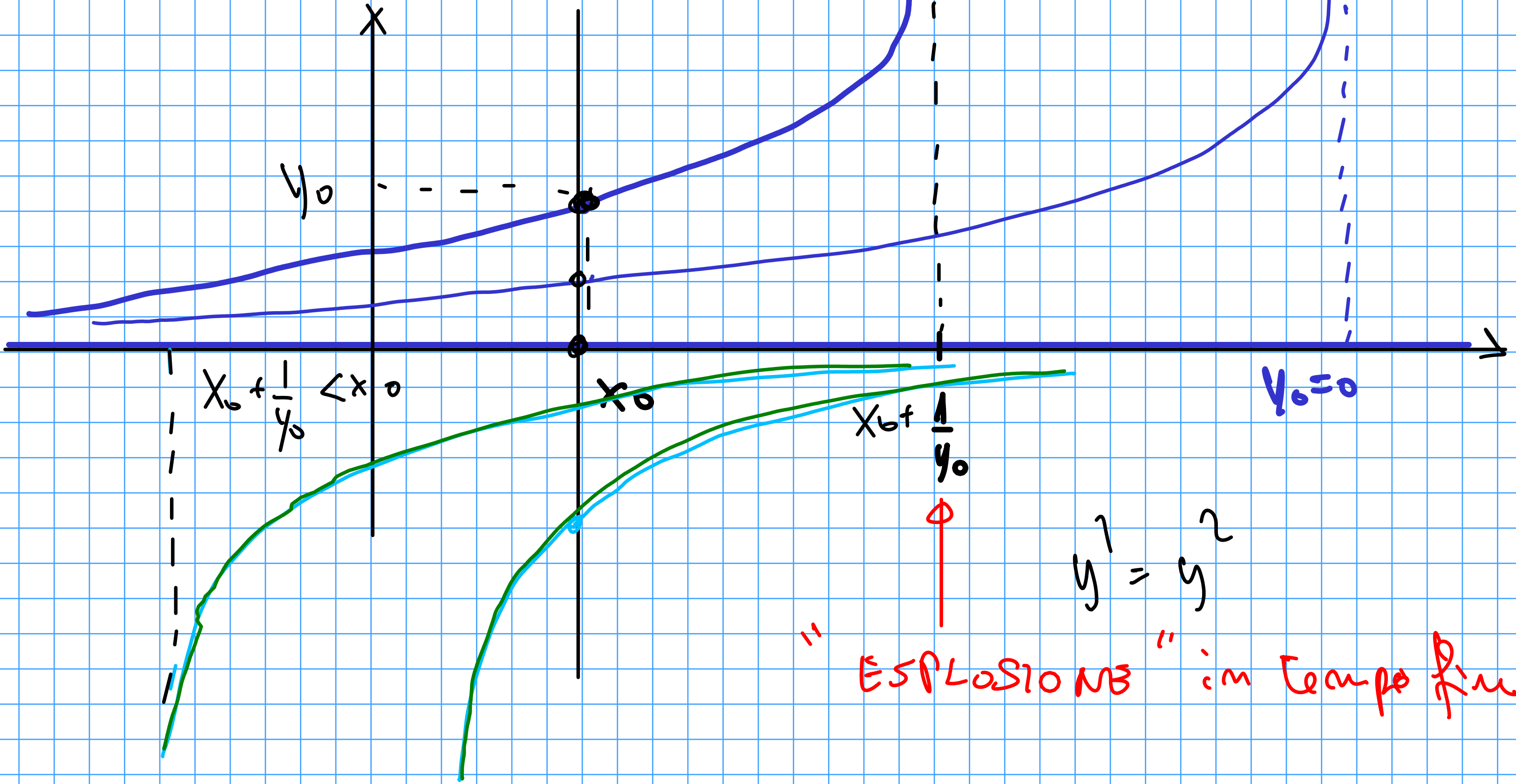


F^{-1} si può esprimere analiticamente:

$$z = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y} \qquad \frac{1}{y} = \frac{1}{y_0} - z \qquad y = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - z}$$

$$\boxed{F^{-1}(z) = \frac{y_0}{1 - y_0 z}}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = F^{-1}(x - x_0) = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}$$



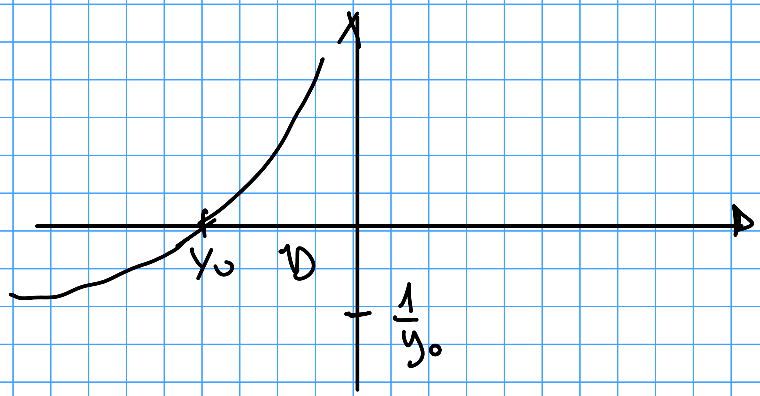
$y' = y^2$

"ESPLOSIONE" in tempo finito!

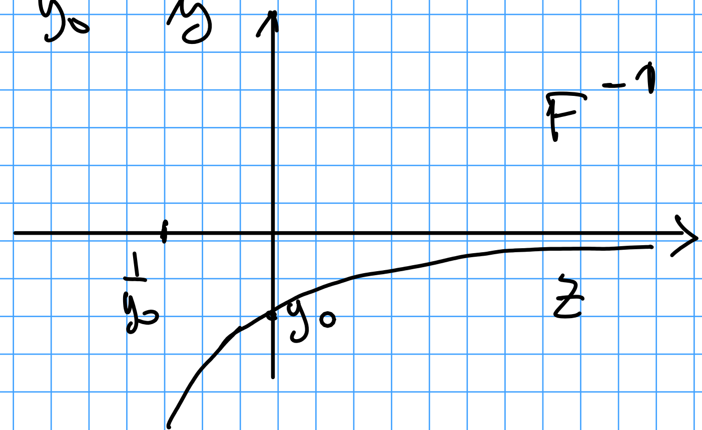
II (b) $y_0 < 0$

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\sigma^2}\, d\sigma \quad \text{è definita per } y < 0$$

$$= \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y}$$



$\rightarrow$



ALTRO ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$J = [0, +\infty[$ $\qquad A(y) = \sqrt{y}$

$I = \mathbb{R}$ $\qquad B(x) = 1$

NOTA CHE B NON È LIPSCHITZIANA (vicino a zero)

Risoluzione l'equazione mediante la formula sopra.

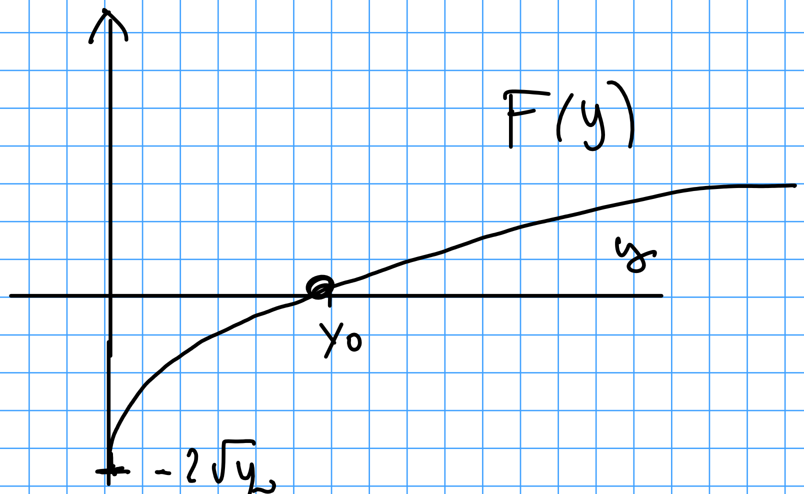
(I) Dato che $A(0) = 0$ c'è la soluzione costante $y(x) = 0 \quad \forall x$

(II) Prendo $y_0 > 0$

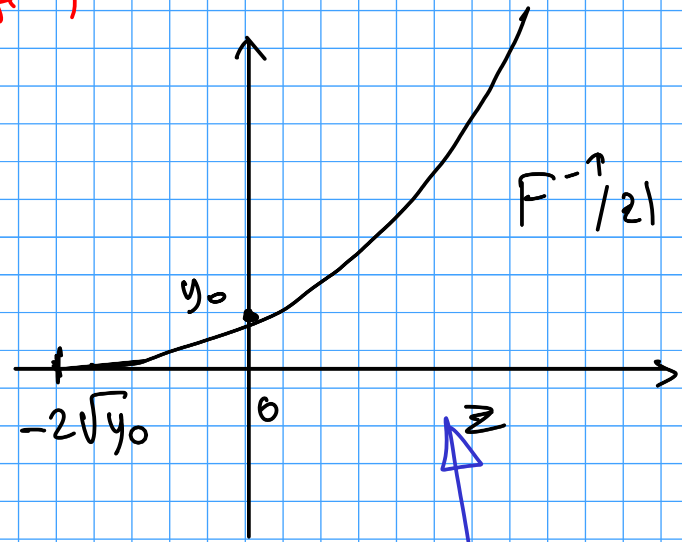
$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\, d\sigma \;\; = \left[2\sqrt{\sigma}\right]_{y_0}^{y} = 2\left(\sqrt{y} - \sqrt{y_0}\right)$$

F è definita per $y > 0$ e $\lim_{y \to 0} F(y) = -2\sqrt{y_0}$

(L'integrale improprio converge)



$\Rightarrow$



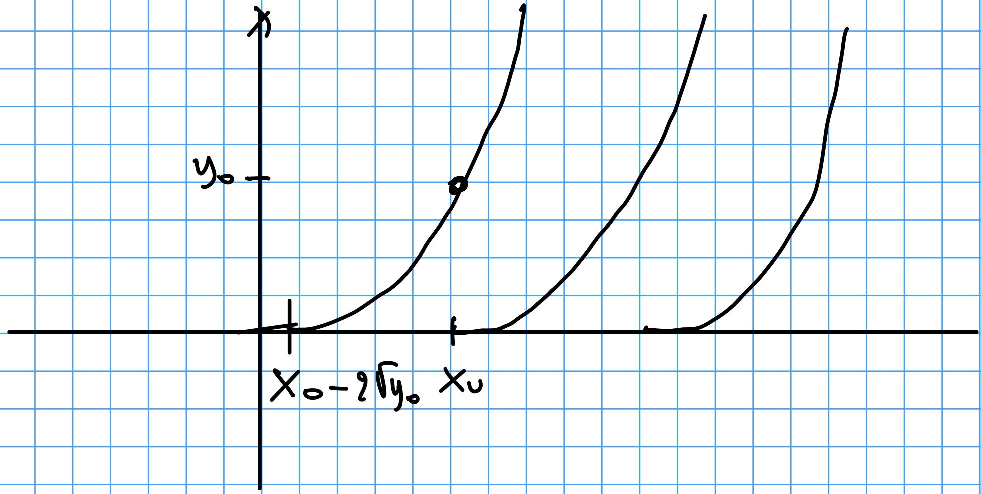
Posso ricavare chi è F^{-1} risolvendo

$$z = 2\left(\sqrt{y} - \sqrt{y_0}\right) \iff \frac{z}{2} + \sqrt{y_0} = \sqrt{y}$$

$$y = \left(\frac{z}{2} + \sqrt{y_0}\right)^2$$

<u>DUNQUE</u> la soluzione per (x_0, y_0) è data da

$$y(x) = \left(\frac{x - x_0}{2} + \sqrt{y_0}\right)^2$$



PERÒ IN $x = x_0 - 2\sqrt{y_0}$ la derivata di y viene ad essere eguale a zero $\Rightarrow$ posso definire

$y(x) = 0$ per $x < \underbrace{x_0 - 2\sqrt{y_0}}_{\bar{x}}$ e così facendo

$y(x)$ è comunque soluzione di $y' = \sqrt{y}$

QUESTO SI PUÒ FARE PERCHÉ LA FUNZIONE

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < \bar{x} \\ \left(\dfrac{x - x_0}{2} + \sqrt{y_0}\right)^2 & x > \bar{x} \end{cases}$$

È DERIVABILE CON DERIVATA CONTINUA.

NE SEGUE CHE <u>NON VALE L'UNICITÀ</u>

SE $y_0 = 0$ INFATTI SE PARTO DA $y(x_0) = 0$

POSSO:

- continuare a rimanere zero per tutti i tempi $> x_0$
- posso uscire dallo zero seguendo la parabola data dalla formula sopra
- posso scegliere $x_1 > x_0$ e rimanere a zero fino a x_1, e quando sono a x_1 uscire seguendo la parabola

È COLPA DEL FATTO CHE $A(y)$ NON È LIP.

(NON È DERIVABILE IN $y = 0$)

<u>ESEMPIO</u>

$$\begin{cases} y' = -x\sqrt{1-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (-1 \le y_0 \le 1)$$

$A(y) = -\sqrt{1-y^2}$ $\qquad J = [-1, 1]$

$B(x) = x$ $\qquad I = \mathbb{R}$

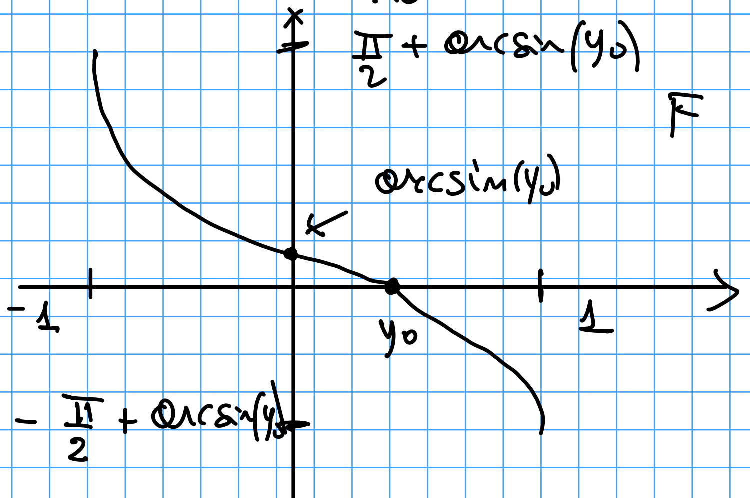
(I) soluzioni costanti : $y(x) = 1$, $y(x) = -1$

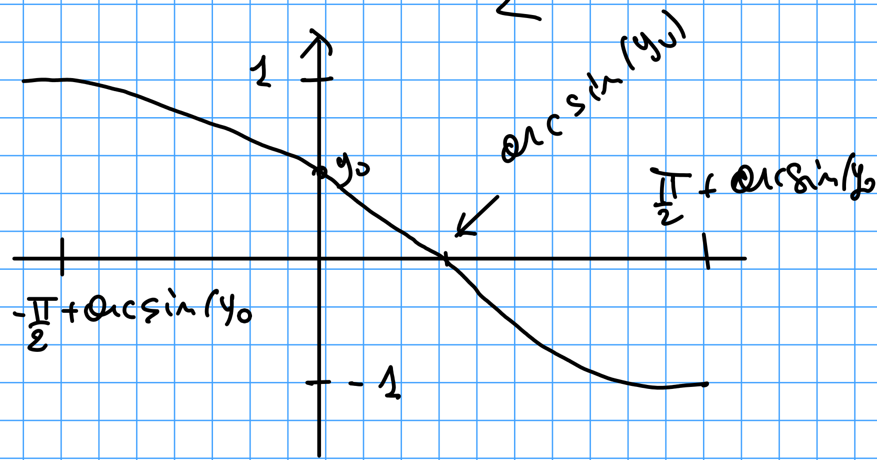
sono soluzioni

(II) prendo $-1 < y_0 < 1$

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{(-1)}{\sqrt{1-\sigma^2}}\, d\sigma = \Big[-\arcsin(\sigma)\Big]_{y_0}^{y} = \arcsin(y_0) - \arcsin(y)$$

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{x_0}^{x} = \frac{x^2 - x_0^2}{2}$$





Ricaviamo analiticamente F^{-1}

$$z = \arcsin(y_0) - \arcsin(y) \iff$$

$$\arcsin(y) = \arcsin(y_0) - z$$

$$y = \sin(\arcsin(y_0) - z) = \underline{-\sin(z - \arcsin(y_0))}$$

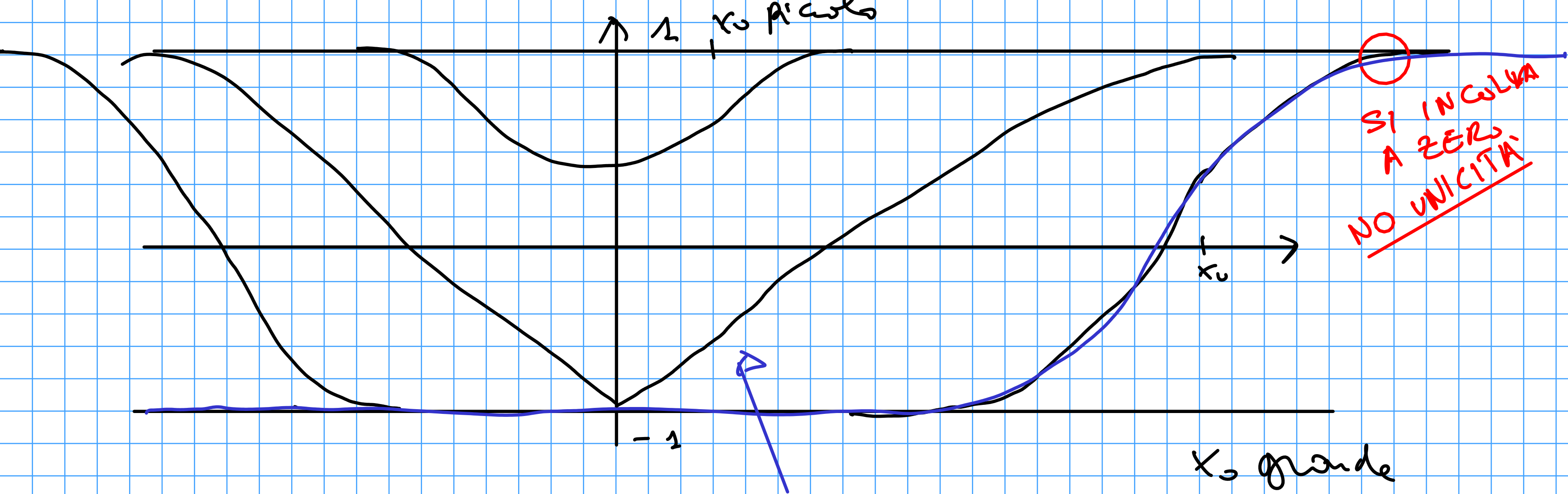
$$\Rightarrow \quad y(x) = -\sin\left(\frac{x^2 - x_0^2}{2} - \arcsin(y_0)\right)$$

per le x tali che

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x^2 - x_0^2}{2} - \arcsin(y_0) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \dots \leq \frac{x^2}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \arcsin(y_0) + \frac{x_0^2}{2}$$

$$\underline{x_0^2 + 2\arcsin(y_0) - \pi} \leq x^2 \leq \pi + x_0^2 + 2\arcsin(y_0)$$



SAREBBE INTERESSANTE CALCOLARE LA SOLUZIONE NEL CASO $x_0^2 + 2\arcsin(y_0) = \pi$