Analisi Matematica I

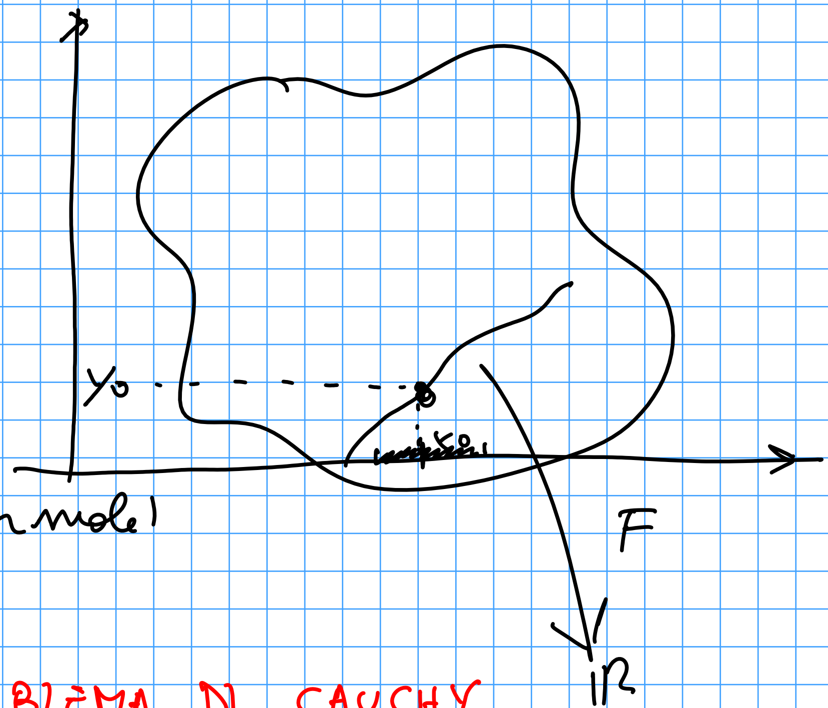
prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 37, 3 maggio 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

TEOREMA (di Cauchy - esistenza e unicità)

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$



$F : \Omega \to \mathbb{R}$

$(x_0, y_0) \in \Omega$

Voglio risolvere il problema

(eq. diff. di ordine 1 - forma normale)

$$(P) \begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

← PROBLEMA DI CAUCHY
(o problema ai valori iniziali)

Risolvere (P) vuol dire:

(a) TROVARE UN INTERVALLO $I \subset \mathbb{R}$ con $x_0 \in I$

(b) TROVARE UNA FUNZIONE $y : I \to \mathbb{R}$ in modo che

- $(x, y(x)) \in \Omega \quad \forall x \in I$
- $y(x_0) = y_0$
- y derivabile e $y'(x) = F(x, y(x)) \quad \forall x \in I$
- È POI UTILE TROVARE "L'INTERVALLO MASSIMALE" in cui

(P) si risolve, e cioè "il più grande intervallo $\bar{I}$ per cui esiste una soluzione $y : \bar{I} \to \mathbb{R}$

<u>IPOTESI</u> Suppongo che F sia "LIPSCHIANA" RISPETTO A y, cioè che esiste L costante reale tale che

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall x, \forall y_1 y_2$$

e che F sia "continua" rispetto a (x, y).

<u>TESI</u> (a) <u>Esiste</u> <u>unica</u> una soluzione (locale) di P

(sono vere le proprietà sopra)

Il termine "locale" si riferisce al fatto che sull'intervallo $\bar{I}$ non sappiamo nulla, eccetto il fatto che è un intorno di x_0

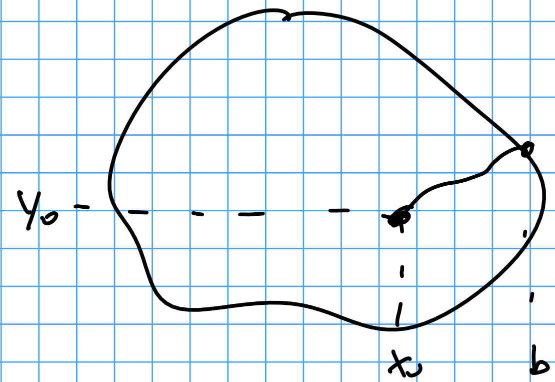
(b) Per ogni x_0 esiste un intervallo massimale $\bar{I}$ tale che, detti a e b gli estremi di $\bar{I}$

- esiste una soluzione di (P) definita su $\bar{I}$, $x_0 \in \bar{I}$

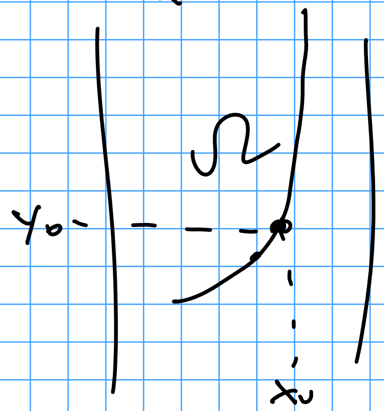
e ci sono tre possibilità:

(1) $b = +\infty$ ($y(x)$ esiste $\forall x > x_0$)

(2) $b < +\infty$, "$\lim_{x \to b^-} y(x)$ è sul bordo di Ω"

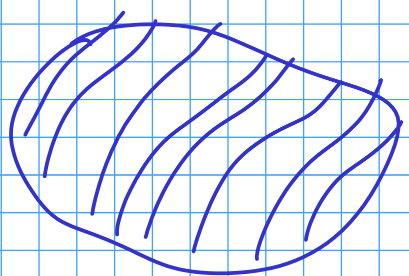


(3) $b < +\infty$, $\lim_{x \to b^-} y(x) = \pm\infty$ (Ω deve essere illimitato)



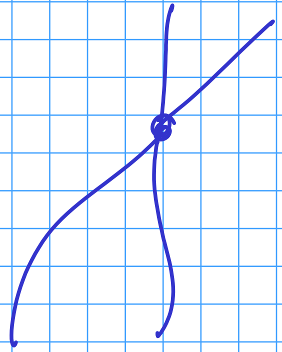
(ANALOGO DISCORSO PER a)

COME LO POSSO INTERPRETARE ? :



← Da ogni (x_0, y_0) di Ω parte UNA CURVA.

Queste curve NON si INCROCIANO mai



No perché se si incrociassero dal punto di incrocio partirebbero DUE soluzioni

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER AVERE L'IPOTESI:

$F(x,y)$ derivabile, con derivata continua in y

- $x^2 e^y$ VA BENE
- $\sin(x)\sqrt{|y|}$ NON VA (NON È LIP. DATO CHE IN $y=0$ c'è una derivata infinita

NO DIM.

Visto questo teorema generale, consideriamo alcuni casi particolari (più semplici – si può trovare esplicitamente la soluzione).

EQUAZIONE LINEARE DEL I° ORDINE IN FORMA NORMALE

(E) $$\boxed{y' = a(x)\, y + b(x)}$$

$a, b : I \to \mathbb{R}$ funzioni continue

(probabilmente si dovrebbe scrivere $y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x)$ ..)

NOTA CHE IN QUESTO CASO $F(x,y) = a(x)\, y + b(x)$ e $\Omega = I \times \mathbb{R}$. Si noti che F è lipschitziana se a è una funzione limitata:

$$\left| F(x, y_1) - F(x, y_2) \right| = \left| a(x)(y_1 - y_2) \right| \leq K |y_1 - y_2|$$

(ammesso che $|a| \leq K$). Però si può dire di più in questo caso. Anzi si può trovare una formula per $y(x)$

PER TROVARE LA FORMULA RISOLUTIVA PER (E)

Supponiamo che ci sia una y (definita in un sottointervallo di I) per cui

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x)$$

Prendiamo A primitiva di a (cioè $A'(x) = a(x)\ \forall x$)

A esiste perché a è continua.

Moltiplichiamo l'equazione per la funzione $e^{-A(x)}$ (sempre $\neq 0$)

$$e^{-A(x)} y'(x) - a(x)\, e^{-A(x)} y(x) = e^{A(x)} b(x)$$

(EQUIVALENTE ALL'EQUAZIONE, VISTO CHE $e^{-A(x)} \neq 0\ \forall x$)

QUESTO SI PUÒ SCRIVERE

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-A(x)} y(x) \right) = e^{-A(x)} b(x)$$

$$\left(\frac{d}{dx} e^{-A(x)} \right) y(x) + e^{-A(x)} y'(x)$$

$$- e^{-A(x)} \frac{d}{dx} A(x) = -e^{-A(x)} a(x)$$

DUNQUE $e^{-A(x)} y(x)$ È PRIMITIVA DI $e^{-A(x)} b(x)$

$$\rightsquigarrow \quad e^{-A(x)} y(x) = \int e^{-A(t)} b(t)\, dt$$

$$\Longleftrightarrow \quad y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt$$

<u>NOTA</u> se $\bar{y}$ è una primitiva di $e^{-A(x)} b(x)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x) = e^{A(x)} \left(c + \bar{y}(x) \right)}$$

È chiaro che la $y(x)$ trovata sopra è effettivamente soluzione dell'equazione.

DUNQUE LE SOL. DI (E) sono tutte e sole quelle date dalla formula sopra.

Si può anche dire meglio la formula facendo intervenire i valori iniziali.

DATI $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ posso definire

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt \qquad \left(\begin{array}{l} A \text{ è la primitiva di } a \\ \text{per cui } A(x_0) = 0 \end{array} \right)$$

Prendiamo come $\bar{y}(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt$

(di nuovo scelgo la primitiva che vale zero in x_0)

Allora, metto $x = x_0$ nella formula

$$y_0 = y(x_0) = e^{A(x_0)}\left(c + \bar{y}(x_0)\right) = e^{0}(c+0) = c$$

DUNQUE LA SOLUZIONE DEL PROB DI CAUCHY

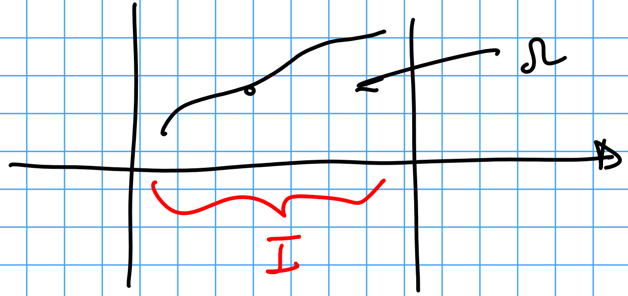
$$\begin{cases} y' = a(x)\, y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

è data da

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= e^{A(x)} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt \right\} \\ \text{dove} \quad A(x) &= \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt \end{aligned}}$$

<u>NOTA</u> $y(x)$ esiste in tutto l'intervallo I in cui sono definiti i coefficienti a, b

L'INTERVALLO MASSIMALE È I, qualunque sia x_0.



(NON PUÒ VERIFARSI IL CASO 3)

ESEMPI

$$y' = \frac{2y}{x} + 1$$

QUI $a(x) = \frac{2}{x}$, $b(x) = 1$

$a(x)$ è definita per $x \neq 0$, MA $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ NON È UN INTERVALLO. ALLORA APPLICO QUANTO TROVATO SOPRA A

$I_1 = \{x > 0\}$ oppure

$I_2 = \{x < 0\}$

METTIAMOCI IN $I = \{x > 0\}$. Chiamo y_0 il valore $y(1)$

FISSO $x_0 > 0$, per esempio $x_0 = 1$. Dalla formula sopra ricavo ($x > 0$)

$$A(x) = \int_1^x \frac{2}{t}\,dt = \Big[\, 2 \ln t \,\Big]_1^x = 2 \ln x - 2 \ln(1)$$

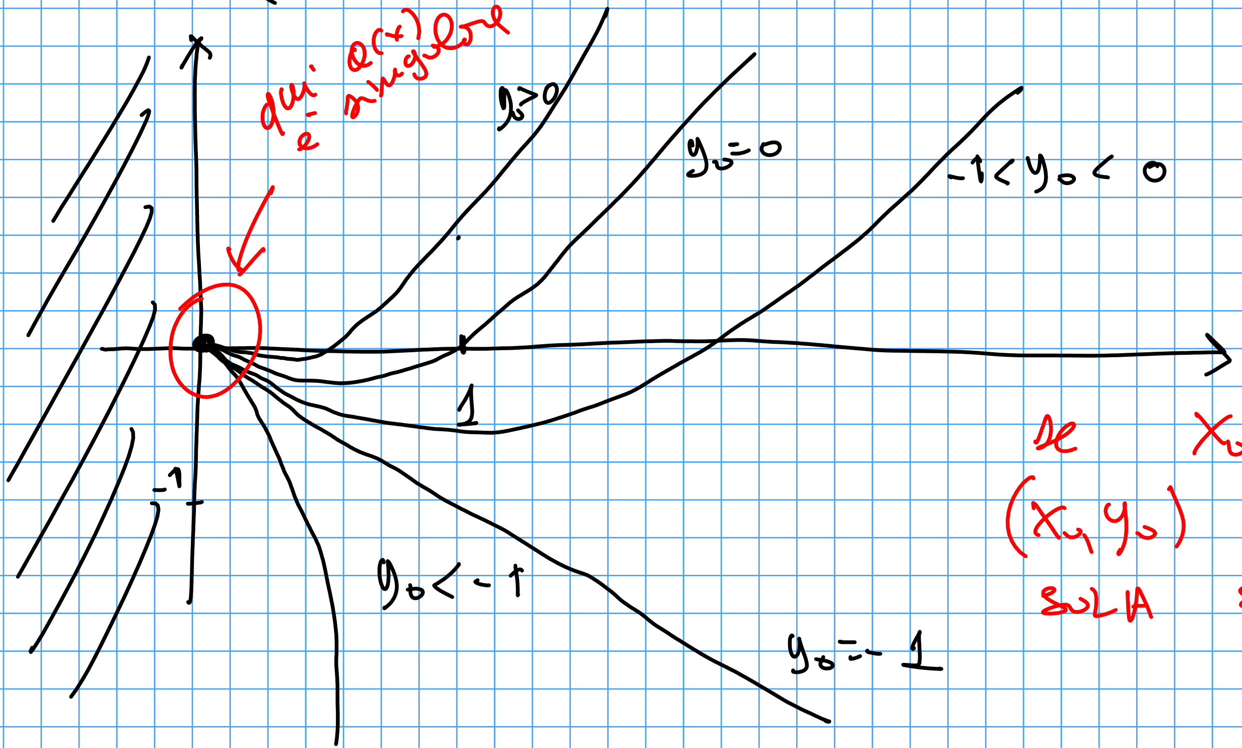
$= \ln x^2 \qquad E \qquad P_{o1}$

$$y(x) = e^{\ln(x^2)} \left\{ y_0 + \int_1^x 1 \cdot e^{-\ln(t^2)}\, dt \right\} =$$

$$x^2 \left\{ y_0 + \int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt \right\} =$$

$$x^2 \left\{ y_0 + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x \right\} = x^2 \left(y_0 + 1 - \frac{1}{x} \right)$$

$$(y_0 + 1)\, x^2 - x$$



se $x_0>0$ per (x_0, y_0) PASSA 1 e 1 SOLA SOLUZIONE

Naturalmente posso risolvere nello stesso modo per $\{x<0\}$

e trovo che la famiglia di tutte le soluzioni è

data da $\{ cx^2 - x \ , \ c \in \mathbb{R} \}$

$$y'(x) = \frac{xy}{1-x^2} + \frac{1}{x-1}$$

$a(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ definita se $x \neq 1$ e $x \neq -1$

$b(x) = \dfrac{1}{x-1}$ definita per $x \neq 1$

SCELGO DI RISOLVERE TRA -1 e 1 $\left(I =]-1, 1[\right)$

Prendo $x_0 = 0$ $\left(y_0 = y(0) \right)$. Applico la formula:

$$A(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t^2}\, dt = \left[-\frac{1}{2} \ln |1-t^2| \right]_0^x =$$

$$-\frac{1}{2} \ln (1-x^2) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y(x) = e^{A(x)}\left\{ y_0 + \int_0^x (t-1)\, e^{-A(x)} \right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{ y_0 + \int_0^x \frac{1}{t-1}\sqrt{1-t^2}\,dt \right\} = \quad (x<1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{ y_0 - \int_0^x \frac{1}{1-t}\sqrt{(1-t)(1+t)}\,dt \right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{ y_0 - \int_0^x \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,dt \right\} = (*)$$

cambio di variabile $\quad s = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \qquad s^2 = \frac{1+t}{1-t} \qquad s^2 - s^2 t = 1 + t$

$$s^2 - 1 = t(1+s^2) \qquad t = \frac{s^2-1}{s^2+1}$$

$$\left(= 1 - \frac{2}{s^2+1}\right) \Rightarrow dt = +\frac{4s\,ds}{(s^2+1)^2}$$

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{ y_0 - \int_1^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{s\; 4s\,ds}{(s^2+1)^2} \right\} = (**)$$

BISOGNA FARE $4\int \frac{s^2}{(s^2+1)^2}\, ds =$

$$2\int s \frac{2s}{(s^2+1)^2}\, ds = \text{(per parti)}$$

$$2s\left(-\frac{1}{s^2+1}\right) + 2\int \frac{1}{1+s^2}\, ds =$$

$$\frac{-2s}{1+s^2} + 2\arctan(s) + \text{cost.}$$

$$(\cancel{*}\,*) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{ y_0 + \left[\frac{2s}{1+s^2} - 2\arctan(s)\right]_1^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \right. =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{ y_0 + \frac{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{1+\frac{1+x}{1-x}} - 1 - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{ y_0 + \frac{\frac{\cancel{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\cancel{2}}}{1-x} + 1 - \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{ C + \sqrt{1-x^2} - 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right\}$$

dove $C = y_0 + 1 - \frac{\pi}{2}$ (C varia in $\mathbb{R}$)

<u>OSS.</u> La soluzione generale $y(x)$ si può dividere

<u>in DUE</u>

$$y(x) = \underbrace{-C\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{y_0(x)} + \underbrace{\frac{1 - 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\sqrt{1-x^2}}}_{\bar{y}(x)}$$

$\bar{y}(x)$ è una soluzione particolare (relativa a $C=0$)

$y_0(x)$ è una soluzione del problema OMOGENEO, cioè quello con $b=0$

Vedremo che questa "struttura" è tipica delle eq. lineari anche di ordine $n > 1$