Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 36, 27 aprile 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

SERIE DI FOURIER

$T > 0$

Dato $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periodico $\left(f(x+T) = f(x) \quad \forall x \right)$

poniamo $\omega = \frac{2\pi}{T}$; cerco dei coefficienti a_n e b_n tali che

$$(*) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

Se tali coefficienti esistono e se si possono scambiare integrali e serie $\Rightarrow$

INTEGRO TRA 0 e T in $(*)$ $\Rightarrow$

$$\int_0^T f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^T \cos(n\omega x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \sin(n\omega x)\,dx =$$

TUTTI NULLI eccetto che per $n=0$

TUTTI NULLI

$$= a_0 \int_0^T 1\,dx = T a_0 \qquad \boxed{a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\,dx}$$

INTEGRO TRA 0 e T $f(x)\cos(k\omega x)$ (dato $k \geq 1$, intero)

e usando ⊗ TROVO

$$\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_0^T \cos(m\omega x)\cos(k\omega x) + \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{b_m \int_0^T \sin(m\omega x)\cos(k\omega x)}_{\text{TUTTI NULLI}}$$

TUTTI NULLI tranne che per $m = k$

$$= a_k \int_0^T \cos^2(k\omega x)\,dx = a_k \frac{T}{2} \Longrightarrow$$

$$\boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,dx \qquad k \geq 1}$$

Con un calcolo analogo (moltiplico per $\sin(k\omega x)$ e integro)

$$\boxed{b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\,dx \qquad k \geq 1}$$

I NUMERI a_n e b_n definiti dalle formule sopra si chiamano "COEFFICIENTI DI FOURIER" di $f(x)$.

PROBLEMA: Data f, costruiti a_n e b_n come sopra posso dire che

$$(*) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

(e se sì per quali x ??)

TEOREMA Se f è derivabile, allora

$(*)$ vale per ogni x reale, cioè, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{K\to+\infty} \sum_{n=0}^{K} a_n \cos(n\omega x) \quad \text{e} \quad \lim_{K\to\infty} \sum_{n=1}^{K} b_n \sin(n\omega x)$$

esistono finiti e la somma dei due limiti fa $f(x)$

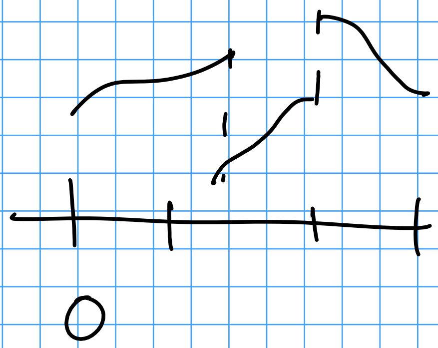
DEF. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice "regolare a tratti" se esistono

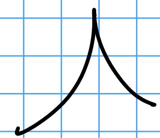
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$ tali che su ogni

$]x_{i-1}, x_i[$ $f(x)$ è derivabile, con derivata limitata

↑

NO CUSPIDI





NO

SI VEDE: che se f è regolare a tratti allora per ognuno degli x_k sopra, esistono finiti

$$\lim_{x \to x_k^-} f(x) \left(=: f(x_k^-)\right) \qquad \lim_{x \to x_k^+} f(x) \left(=: f(x_k^+)\right)$$

(NO DIM.)

UNA FUNZ. REGOLARE A TRATTI PUÒ AVERE SOLO (UN NUMERO FINITO) DI SALTI

TEOR. (MIGLIORAMENTO DEL PRECEDENTE) Se f è regolare a tratti $\Rightarrow$ la serie di Fourier tende a $f(x)$ per le x in cui f è derivabile e tende a

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$ se x è punto di salto

SI POTREBBERO DARE DELLE NOZIONI DI CONV. DELLE SERIE PER CUI LA SERIE DI FOURIER CONVERGE A f IN IPOTESI PIÙ GENERALI.

IDEA Dato $k \in \mathbb{N}$ considero

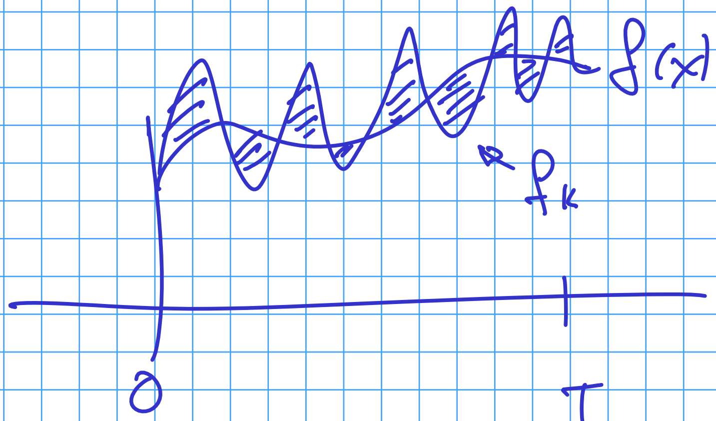
$$f_k(x) = \sum_{m=0}^{k} a_m \cos(m\omega x) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\omega x)$$

(a_m e b_m i coeff di Fourier di f !

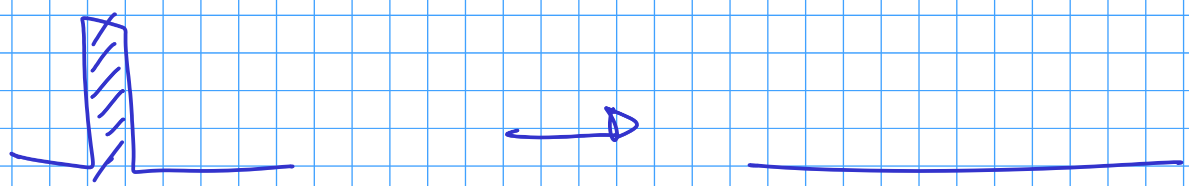
IL TEOR. DI PRIMA CI DICE CHE, se f è reg. a tratti, FISSATO x $\quad f_k(x) \longrightarrow f(x) \quad \left(o \;\; o \;\; \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} \right)$

per $K \to \infty$

SI POTREBBE ANCHE DARE UN ALTRO SENSO ALLA CONVERGENZA DELLE FUNZIONI f_k alla funzione f



Potrei per esempio chiedere che $\int_0^T |f(x)-f_k(x)|\,dx \to 0$



Se prendo queste nozioni di convergenza "in media" allora la serie di Fourier converge a f con pochissime ipotesi su f.

PROPRIETÀ VARIE

- REGOLARITÀ DI f $\longleftrightarrow$ SOMMABILITÀ DEI COEFFICIENTI

- Ruolo dei coeff. a_n e b_n, che ipotesi servono per sapere che la serie costruita a partire da questi coeff. mi dà una f

TEOREMI Siano date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$.

Consideriamo $$f_K(x) = \sum_{n=0}^{K} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{K} b_n \sin(n\omega x)$$

(a) Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty \Rightarrow$

esiste f continua (T periodica) tale che

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(x) = f(x)$$

INOLTRE $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$, $a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)$, $b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n| < +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| < +\infty$

$\Rightarrow$ f è derivabile e

$$f'(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)\,n\omega\sin(n\omega x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,n\omega\cos(n\omega x)}_{\text{(serie delle derivate)}}$$

(b') più in generale se $\sum_{n=1}^{\infty} n^k|a_n| < +\infty$ $\sum_{n=1}^{\infty} n^k|b_n| < +\infty$

$\Rightarrow$ f è derivabile K volte e

$$f^{(K)}(x) = \sum \text{ derivate } K\text{-esime dei termini della serie}$$

(c) Se sono convergenti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, allora

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)^2\,dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

(energia di f = somma delle energie delle componenti armoniche)

(IDEA DELLA DIM:

$$\int_0^T f^2(x)\,dx = \int_0^T \left(\sum_{K=0}^{\infty} a_K \cos(K\omega x) + \sum_{K=1}^{\infty} b_K \sin(K\omega x)\right)\cdot$$

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\omega x) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\omega x)\right) dx =$$

$$\sum_{m,K=0}^{\infty}\left\{ a_K a_m \int_0^T \cos(m\omega x)\cos(K\omega x) + a_K b_m \int_0^T \cos(K\omega x)\sin(m\omega x)\,dx\right.$$

$$+ \; b_k a_n \int_0^T \sin(k\omega x)\cos(n\omega x) + b_k b_n \int_0^T \sin(k\omega x)\sin(n\omega x)\,dx \Big\}$$

TUTTI ADDENDI NULLI SE $k \neq n$ O $\not\exists$

CI SONO $\sin$ e $\cos$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \int_0^T \cos^2(n\omega x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \int_0^T \sin^2(n\omega x)\,dx =$$

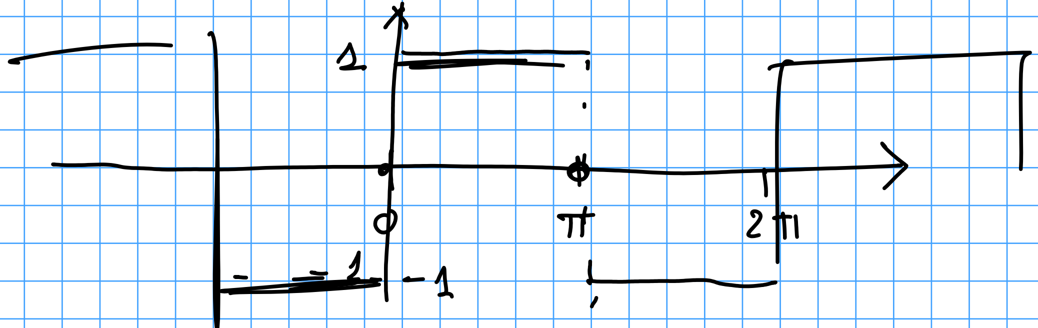
$$T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

ESEMPI

$T = 2\pi \qquad \omega = 1$

$\to$ armoniche sono $\sin(nx)$ $\cos(n\omega)$

ONDA QUADRA



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{se } \pi < x < 2\pi \end{cases} \quad (\text{e periodicizzata})$$

NOTA $f(x)$ è dispari ($\Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k$)

TROVIAMO I b_k

$$b_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(nx)\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_{\pi}^{2\pi} \right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n} + \frac{\cos(n\pi)}{n} \right) \right) =$$

$$\frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi) \right) = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \dfrac{4}{n\pi} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

DUNQUE

$$f(x) = \sum_{n \text{ DISPARI}} \frac{4}{n\pi} \sin(nx)$$

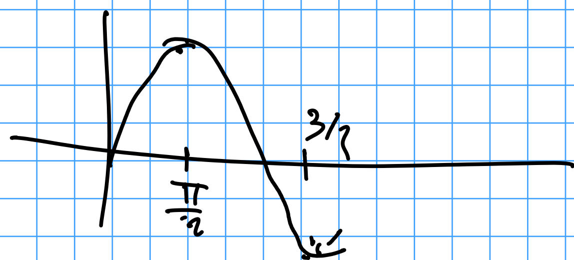
($f(x)$ devo intenderla zero nei salti)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x)$$

Se metto $x = \frac{\pi}{2}$ so che $f(x) = 1$ $\Rightarrow$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{2k+1}$$

$$\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$$



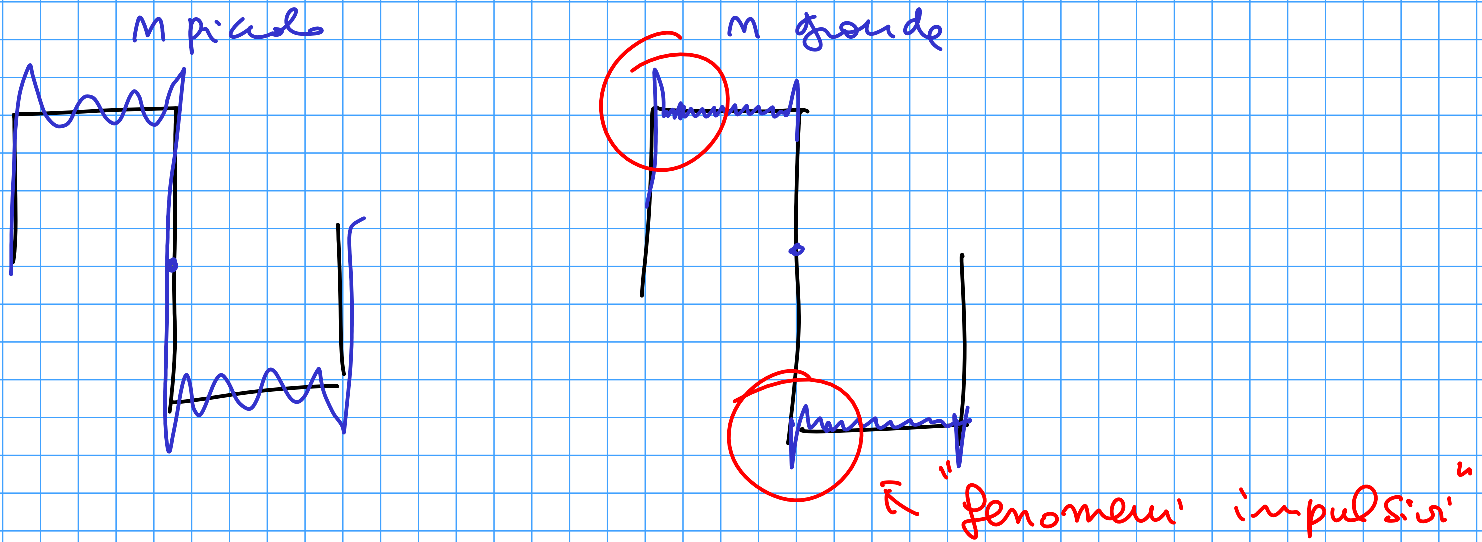
$$\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} =$$

DUNQUE

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$$

NOTA $b_n \simeq \frac{1}{n}$ DUNQUE $\sum |b_n|$ DIVERGE

in effetti f è discontinua



in blu le approssimanti f_n (NOTA CHE $f_n(\pi) = 0$ $\forall n$)

<u>OSS.</u> Nel calcolo dei b_K, caso precedente, si poteva fare così:

$$b_K = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(Kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \sin(Kx)}_{\text{PARI}}\, dx =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(Kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(Kx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi k}\left(\cos(k\pi)-1\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ PARI} \\ \frac{4}{\pi k} & k \text{ DISPARI} \end{cases}$$

APPLICHIAMO LA FORMULA (c) ("Energia") a f

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2 = \underset{\overset{\|}{0}}{a_0} + \frac{1}{2}\underset{\overset{\|}{0}}{\sum a_n^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

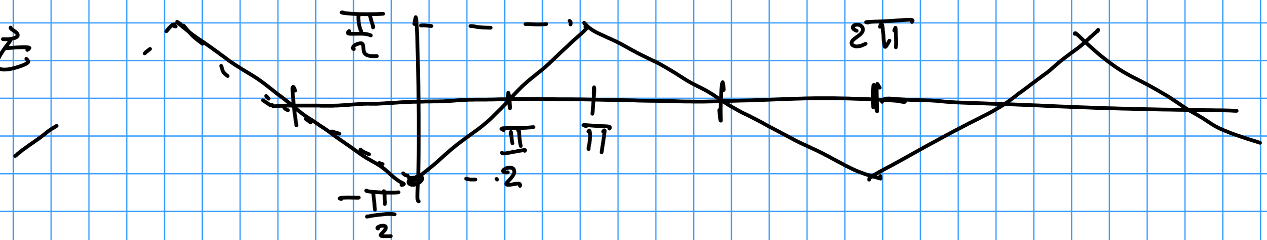
$$\|$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dx = 1$$

A destra trovo $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi}\frac{1}{2k+1}\right)^2 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$

DUNQUE $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

ONDA TRIANGOLARE



$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x \in [0, \pi] \\ -x - \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x \in [-\pi, 0] \end{cases} \qquad \text{(periodizzata di periodo } 2\pi\text{)}$$

$$\left(= |x| - \frac{\pi}{2}\right)$$

Si vede che f è pari e che $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \qquad (a_0 = 0, \; b_k = 0 \; \forall k)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cos(kx)}_{\text{PARI}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(kx)\, dx = \text{(per parti)}$$

$$\frac{2}{\pi} \underbrace{\cancel{\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi}}}_{=0} - \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \sin(kx)\, dx =$$

$$-\frac{2}{\pi k}\left[-\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} = +\frac{2}{k^2\pi}\left(\cos(k\pi)-1\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ PARI} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & k \text{ DISP.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(kx) \quad (\star)$$

sta volta $\sum |a_k| < +\infty$ perché $a_k \simeq \frac{1}{k^2}$

e quindi f è continua

Però f NON è DERIVABILE, infatti $\sum_k k a_k = +\infty$

$$k a_k \simeq \frac{1}{k}$$

Se metto $x=0$ in $(\star)$ trovo

$$-\frac{\pi}{2} = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

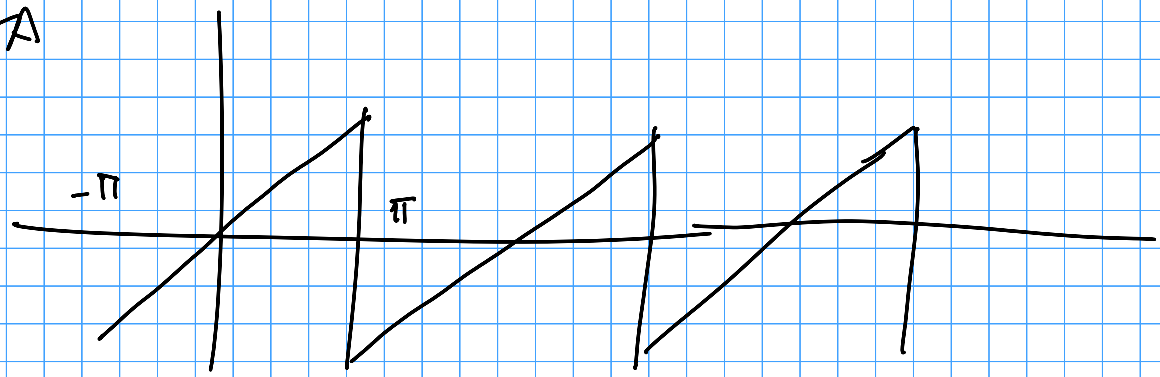
(la formula di prima)

Se metto $x=\pi$ trovo

$$\frac{\pi}{2} = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} (-1)^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = -\frac{\pi^2}{8}$$

DENTE DI SEGA



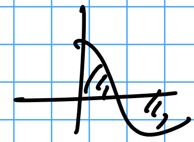
$f(x) = x$ se $-\pi < x < \pi$ (periodicizzato di 2π)

DISPARI $\Rightarrow$ $a_n = 0$ cerca i b_n

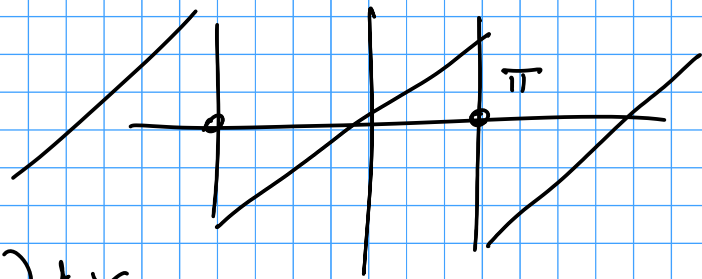
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin(nx)\,dx = \text{(per parti)}$$

$$\frac{2}{\pi} \left[\frac{x(-\cos(nx))}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx}_{=0} =$$

$$\frac{2}{\pi n}\left(\pi\left(-\cos(n\pi)\right)+0\right) = \frac{-2(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$



$$\Rightarrow \quad f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$



CALCOLIAMO L'"ENERGIA" $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\frac{\pi^3}{3}$$

Dalla formula (c)

$$\frac{1}{2\pi}\left(2\frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\right)^2 =$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \iff \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Se tolgo i termini dispari :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{24}$$

TORNA PERCHÉ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{24}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Nel modo più generale un'eq. diff è un problema in cui si cerca una funzione $y(x)$ che soddisfi a delle assegnate condizioni su $y(x)$ e sulle sue derivate

FORMALMENTE CERCO $y(x)$ TALE CHE

$$\mathcal{F}\left(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y(x), x \right) = 0$$

($\mathcal{F}$ è una funzione di $n+2$ variabili)

Per esempio

$$\sin\left(y'' + x\right) = y(x) - x^2$$

n È L'ORDINE DELL'EQUAZIONE, cioè la derivata massimo che compare nell'equazione.

Se l'equazione ha la forma:

$$y^{(n)} = f_0\left(y^{(n-1)}, \dots, y, x\right)$$

si dice che l'equazione È IN FORMA NORMALE

per esempio $$y'' = \frac{\ln\left(x + y'(x)\right)}{y''(x) + x^2}$$

CONSIDEREREMO ALCUNI CASI

- EQUAZIONI LINEARI, di ORDINE n

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)\, y(x) = b(x)$$

dove $a_0 \dots a_n$, b sono delle funzioni di x, detti COEFFICIENTI DELL'EQUAZIONE

- vedremo la formula risolutiva generale nel caso $n=1$

- vedremo le proprietà (non una formula risolutiva) per l'eq. lineare di ordine n

- vedremo la formula risolutiva se i coefficienti a_k non dipendono da x

- EQ. DI ORDINE 1 A VARIABILI SEPARABILI

$$y' = A(y(x)) \cdot B(x) \qquad \left(\text{Per es. } y' = y^2 x \right)$$

C'È UNA FORMULA RISOLUTIVA

- UN TEOREMA GENERALE DI ESISTENZA PER L'EQ.

$$y' = F(y(x), x) \qquad \text{se } F \text{ è LIPSCHITZIANA}$$

NOTIAMO CHE IL PROBLEMA DELLE PRIMITIVE

$$y' = f(x)$$

È UN' EQ. DI PRIMO ORDINE LINEARE

GIA' IN QUESTO CASO "SEMPLICE" NON C'È UNA UNICA SOLUZIONE

LA SOLUZIONE DIVENTA UNICA SE AGGIUNGO UNA "CONDIZIONE INIZIALE": FISSO x_0, e y_0

cerco y tale da $y' = f$ $\quad y(x) = y_0$

$$\left(\Rightarrow \quad y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0 \right)$$

VEDREMO CHE QUESTO FATTO VALE IN GENERALE PER LE EQ. DI ORDINE 1