Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 34, 20 aprile 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

Osservazioni sulle serie: confronto con l'idea intuitiva di SOMMA

COMPITINO: SABATO 1/6 ore 8.30
aula B.21

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

Se ho una somma di un numero finito di addendi

so che $a+b+c+d = (a+b)+(c+d)$

VALE UN ANALOGO RISULTATO PER LE SERIE?

FORMALMENTE: prendo $\{a_n\}$ successione di numeri reali

(e considero la serie $\sum a_n$).

prendo $\sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente, $\sigma_1 = 1$

(dunque per ogni k σ_k è un intero e $\sigma_{k+1} > \sigma_k$)

$$\underbrace{a_1 \quad a_2 \quad a_3}_{b_1} \quad \underbrace{a_4 \cdots a_5 \quad a_6}_{b_2} \; - \; \underbrace{a_7 \quad\quad a_{10}}_{b_3} \quad a_{11} \cdots$$

$\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 4$, $\sigma_3 = 7$, $\sigma_4 = 11 \ldots$

PONGO $b_k = a_{\sigma_k} + \dots + a_{\sigma_{k+1}-1} = \sum_{j=\sigma_k}^{\sigma_{k+1}-1} a_j$

Ho costruito una successione $\{b_k\}$ ottenuta "associando" i termini di $\{a_n\}$ (secondo la legge data da $\{\sigma_k\}$)

<u>DOMANDA</u> che relazione c'è tra la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

<u>RISPOSTA</u> Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge

in quanto le somme parziali della seconda serie sono una successione estratta da quelle della prima (se convergono le somme sono uguali)

IL VICEVERSA È FALSO IN GENERALE. Per esempio

se $a_n = (-1)^n$ e se $\sigma_k = 2k-1$ $k = 1 \dots$

$\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 5$ ...

$$\underbrace{-1+1}_{0}\ \underbrace{-1+1}_{0}\ \underbrace{-1+1}_{0} + \dots \underbrace{\quad}_{0}$$

$b_1 = a_1 + a_2 = -1 + 1 = 0$

$b_2 = a_3 + a_4 = -1 + 1 = 0$

$\vdots$

$b_k = 0$

IN QUESTO CASO LA SERIE $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge e ha somma zero

mentre la serie $\sum_{m=1}^{\infty} a_k$ è indeterminata

SE PERÒ $a_m \geq 0$ IL VICEVERSA VALE, cioè

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ CONVERGE} \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} a_m \text{ CONVERGE}$$

(e hanno la stessa somma)

QUESTO È VERO ANCHE SE $\sum a_m$ è ASSOLUTAMENTE CONV.

(NO DIM.)

PROPRIETÀ COMMUTATIVA

Ricordiamo che
$$(a+b+c+d) = (b+c+a+d) = (a+d+c+b) \dots$$

C'È UNA PROPRIETÀ ANALOGA PER LE SERIE ?

CONSIDERO UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}$ (di cui faccio la serie) e una $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ INIETTIVA E SURGETTIVA

($\sigma = \{\sigma_k\}$ è un "riordinamento di $\mathbb{N}$" o una "permutazione di $\mathbb{N}$")

Data σ_k risulta definito un riordinamento di a_n:
$$b_k = a_{\sigma_k}$$

Domanda: se $\sum_n a_n$ converge $\overset{??}{\Rightarrow}$ $\sum_k a_{\sigma_k}$ CONVERGE

(e se sì, ha lo stesso somma?)

SÌ se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è ASSOLUTAMENTE CONV. (in particolare se $a_n \geq 0$)

No se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ NON È ASS. CONV.

IN EFFETTI VALE IL SEGUENTE FATTO:

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE MA NON ASSOLUTAMENTE SI PUÒ

(a) TROVARE $\{\sigma_k\}$ in modo che $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma_k}$ DIVERGE A $+\infty$ (o a $-\infty$)

(b) Dato un qualunque numero reale ℓ, si può trovare una $\{\sigma_k\}$ tale che

$\sum_{k} a_{\sigma_k}$ converge e ha come somma ℓ !!!

PER ESEMPIO PRENDO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (so che converge per il criterio di Leibniz – ma non ass. perché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$)

Vediamo come si costruisce un riordinamento che la fa divergere a $+\infty$.

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}$$

$$-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$$

LI RIORDINO COSÌ:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\overbrace{\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{4}}}^{2}-\frac{1}{7}+\overbrace{\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}}^{4}-\frac{1}{9}+$$

$$\underbrace{\frac{1}{18}+\cdots+\frac{1}{32}}_{8}-\frac{1}{9}\cdots$$

$$\geq\frac{1}{2}+\frac{n}{4}-\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right)}_{\simeq\ln(n)}\longrightarrow+\infty \quad \text{se } (n\to+\infty)$$

CONSIDERARE LE SERIE NON ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI
È CONCETTUALMENTE PROBLEMATICO

"PRODOTTO TRA SERIE"!!

SONO DATE due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ e le loro serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$

$$\sum_n a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots +$$

$$\sum_n b_n = b_1 + b_2 + \dots b_n + \dots$$

COME POSSO SCRIVERE $\left(\sum_n a_n\right)\left(\sum_n b_n\right)$!!

SI PUÒ PENSARE CHE QUESTO PRODOTTO SIA

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m \qquad \text{perché}$$

$$(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots b_m) = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..m}} a_i b_j$$

NON MI PIACE, troppo complicato

$$
\begin{array}{c|ccccc}
5 & & & & a_5 b_4 & \\
4 & & & & & \\
3 & a_3 b_1 & & & & \\
2 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & & & \\
1 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & a_1 b_4 & a_1 b_5 \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}
$$

IDEA: SOMMO SULLE DIAGONALI

chiamo $c_1 = a_1 b_1$

$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$

$c_3 = a_1 b + a_2 b_2 + a_3 b_1$

$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i+1}$ ($\{c_k\}$ si chiamo PRODOTTO ALLA CAUCHY tra $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$

CONGETTURA: Se $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergono $\Rightarrow$

$\sum_n c_k$ converge e la sua somma vale

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

RISPOSTA SÌ se le due serie sono assolutamente convergenti.

ESEMPIO DI UTILIZZO DEL PRODOTTO.

Abbiamo detto che $\forall x \geq 0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge

(criterio del rapporto)

Se $x < 0$ è chiaro che $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ CONVERGE

per lo stesso motivo.

DUNQUE se $x \in \mathbb{R}$ $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{F(x)}$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

Per quanto visto nelle serie $F(x)$ è ben definita $\forall x \in \mathbb{R}$

È OVVIO CHE $F(0) = 1$

DICO che $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$

Dim: Per il risultato sul prodotto alla Cauchy so che

$$F(x)\cdot F(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

dove $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} x^k y^{n-k} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} =$$

(binomio di Newton)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = F(x+y)$$

ALLORA POTREI DEFINIRE e^x COME $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

se faccio così e risulta definito da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(sarebbe per molti versi PIÙ SEMPLICE)

SERIE DI POTENZE

Si tratta di serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dove x è un parametro reale (e $\{a_n\}$ è una successione assegnata)

MI INTERESSA COME TALE SERIE DIPENDE DA x

NOTA: STO CONSIDERANDO DEI "POLINOMI DI GRADO ∞"

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

PRIMA DOMANDA: Dato $\{a_n\}$ quali sono le $x \in \mathbb{R}$ per cui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge

TEOREMA

Dato $\{a_n\}$ prendiamo

$$M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$(\in [0, +\infty])$

(se il limite non esiste si può definire M usando la nozione di "MASSIMO LIMITE")

$$\overline{R} := \frac{1}{M} \quad \begin{pmatrix} +\infty & \text{se } R=0 \\ 0 & \text{se } R=+\infty \end{pmatrix}$$

($\overline{R}$ si chiama "raggio di convergenza")

ALLORA

(a) se $|x| < \overline{R} \implies$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ CONV. ASSOLUTAMENTE

(b) se $|x| > \overline{R} \implies$ la serie " " NON CONVERGE

(se $|x| = \overline{R}$ NON SI PUÒ DIRE, dipende da $\{a_n\}$)

DIM. (a) Considero la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ e applichiamo a questa serie il criterio della radice n-esimo:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = M|x|$$

SE $M|x| < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ CONV. $\implies \sum a_n x^n$ CONV. ASS

$\Updownarrow$

$|x| < \frac{1}{M} \quad (=: \overline{R})$

(se $M = +\infty$ NON TROVO NULLA

se $M = 0$ TROVO TUTTE LE x)

(b) Se $|x| > \bar{R} \iff |x| M > 1$ (cioè $\sqrt[n]{|x^n a_n|} \to |x| M > 1$)

$\Rightarrow |x^n a_n| \to +\infty \Rightarrow x^n a_n$ NON TENDE A ZERO

$\Rightarrow$ LA SERIE NON PUÒ CONVERGERE

ESEMPIO $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$

serie di potenze dove $a_n = 1 \ \forall n$. Dato che $\sqrt[n]{1} \to 1$

il raggio di convergenza è 1 LO SAPEVAMO GIÀ

(e sapevamo anche che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ x $-1 < x < 1$)

ANALOGAMENTE $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ ..., $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}\right)$

convergono assolutamente x $-1 < x < 1$, dato che

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^k}} \to 1 \qquad (\forall k)$$

NOTA . Se considero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ e metto $x = 1$ TROVO LA serie armonica $\sum_n \frac{1}{n}$ DIVERGENTE, se metto $x = -1$ TROVO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge non assolutamente

. Se invece considero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ vedo che questa converge assolutamente anche per $x = 1$ e $x = -1$

ESEMPIO

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \ldots$$

QUESTA SERIE PUÒ ESSERE SCRITTA $\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ — serie geometrica di ragione $-x^2$. VISTA così tale serie converge quando $|-x^2| < 1 \iff |x| < 1$, Inoltre la sua somma vale $\frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$

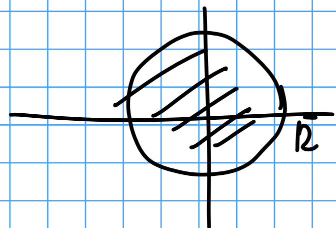
STRANO che in $x = 1$ / $x = -1$ non succede nulla di male come mai la serie non converge più quando x supera 1 ??

LA COSA SI CAPISCE SE SI LAVORA IN $\mathbb{C}$
($\mathbb{C}$ = numeri complessi).

Se consideriamo $\{a_n\}$ successione in $\mathbb{C}$ e serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$ si può ancora definire

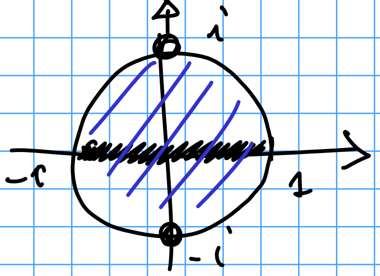
$M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$ e $\bar{R} = \frac{1}{M}$ e si può dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge quando

$|z| < \bar{R}$ cioè per z nel cerchio aperto di centro zero e raggio $\bar{R}$



Nel caso precedente si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}$$ e NON È DEFINITO IN $\pm i$



PROPRIETÀ DI $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ al variare di x

(dentro l'intervallo $]-\bar{R}, \bar{R}[$

TEOREMA Data $\{a_n\}$, sia $\bar{R} = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (raggio di conv.)

e supponiamo $\bar{R} > 0$. Sia $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(che è definita per $-\bar{R} < x < \bar{R}$). SI HA:

- S è continua in $]-\bar{R}, \bar{R}[$
- S è derivabile in $]-\bar{R}, \bar{R}[$

- $S'(x)$ è eguale a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$

dove la serie scritta sopra (è un'altra serie di potenze) ha lo stesso raggio di convergenza $\bar{R}$

NON LO DIMOSTRO, PERÒ è facile vedere che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

hanno lo stesso raggio di convergenza, dato che

$$\sqrt[n]{|a_n| \cdot n} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow \frac{1}{\bar{R}}$$

ESEMPIO Se definisco $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(\bar{R} = +\infty)$

dimostriamo che $F'(x) = F(x)$. Usando il teorema sopra

OTTENGO CHE F è derivabile $\forall x$ e

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = F(x)$$

$(n-1=m)$

NEL TEOREMA POSSO ITERARE IL RISULTATO $\Longrightarrow$

$S(x)$ si può derivare quante volte si vuole e

$$(*) \quad S^{(k)}(x) = \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} a_n \, n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k}}_{\text{HA RAGGIO DI CONV. } \bar{R}}$$

OSSERVAZIONE Se metto $x=0$ in $(*)$ (resto solo il termine con $n=k$)

$$S^{(k)}(0) = a_k \, k(k-1)\cdots 1 = a_k \, k!$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_k = \frac{S^{(k)}}{k!}$$

gli a_n sono i coefficienti di Taylor della funzione

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, . \qquad \sum_{n=0}^{k} a_n x^n = P_k(x) \text{ relativo alla serie}$$

(Le serie di potenze si possono anche chiamare "serie di Taylor")

SORGE UNA DOMANDA?

Se parto da una $f(x)$, infinitamente derivabile, definisco

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

e considero la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(a) posso dire che la serie converge per le x in cui $f(x)$ esiste

(b) Per le x in cui la serie converge, posso dire che la somma della serie è uguale a $f(x)$

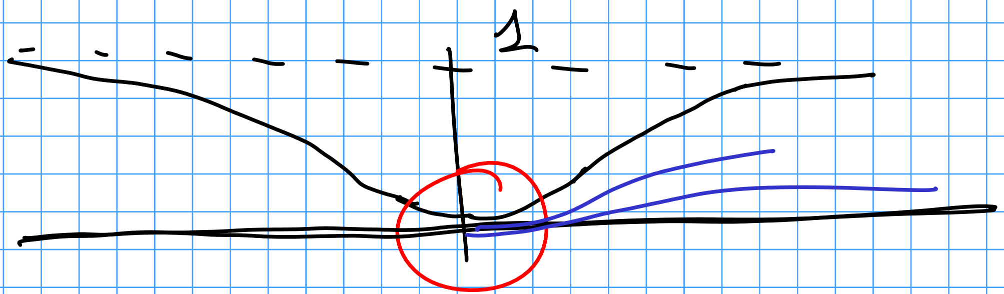
<u>NO</u> a entrambe

(a) Se prendo $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\Rightarrow$ la serie di Taylor è la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

PERÒ QUESTA SERIE CONVERGE SOLO PER $-1 < x < 1$

mentre $f(x)$ esiste $\forall x \neq 0$

(b) Si può considerare $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



Si ha $f(x) = o(x^k)$ $\forall k$ intero $\lim_{x \to 0^\pm} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} =$

$$\lim_{\substack{y \to +\infty \\ (-\infty)}} y^k e^{-y^2} = 0$$

$\Rightarrow$ (si vede) $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k$

$\Rightarrow$ la serie di Taylor associata a questa f è identicamente nulla.

PERÒ $f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$

COMMENTO

Le funzioni che si ottengono come somme di una serie di potenze sono una classe di funzioni MOLTO BUONE – sono infinitamente derivabili, ma anche di più ..

SI CHIAMANO FUNZIONI ANALITICHE

TUTTO QUANTO DETTO PRIMA SI PUÒ RIPETERE PER

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$\Downarrow$$

L'INTERVALLO DI CONVERGENZA DIVENTA

$$\left]x_0-\bar{R},\, x_0+\bar{R}\right[\quad , \quad \bar{R} = \left(\lim \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$$