Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 33, 19 aprile 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

Altri esempi (studio della convergenza di una serie)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)$$

NON CONVERGE PERCHÉ

$\cos(n)$ NON TENDE A ZERO

SI SA CHE $\lim_{n\to\infty} \cos(n)$ NON ESISTE

(è legato al fatto che π è irrazionale)

Dato che $\cos(n)$ non ha limite $\Rightarrow$ non vale la condizione necessaria per la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$ LA SERIE NON CONVERGE

Anche in questo caso non è verificata la cond. necessaria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)}_{a_n}.$$

Chiamo $a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$

NOTO CHE $a_n \leq 0 \quad \forall n$ Posso usare i criteri di confronto.

CERCO UNA b_n "NOTA" tale che $a_n \simeq b_n$

Conviene cercare $b_n = -\frac{1}{n^\alpha}$. Vediamo allora quanto fa

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{-\frac{1}{n^\alpha}}$$

TAYLOR

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{1} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \cancel{1}}{-\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \frac{n^\alpha}{n^2}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \underline{\underline{\text{SE } \alpha = 2}}$$

HO MOSTRATO CHE $a_n \simeq -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$

DATO CHE $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ <u>CONVERGE</u>

(in quanto $2 > 1$) $\Rightarrow$ Anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{NOTA: } a_n \geq 0)$$

PER TAYLOR $\quad a_n \simeq \frac{1}{n}$

DATO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGE $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ DIVERGE

(anche se $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$)

PIÙ IN GENERALE SE CONSIDERO

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ vedo che $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \simeq \frac{1}{n^2}$

(sempre per la formula di Taylor: $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$
$\frac{1}{n^2}\left(1 + o(1)\right)$)

$\Rightarrow$ La serie converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$!

SE AVESSI $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$

POTREI DIRE CHE $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \simeq \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE DATO CHE LA serie $\sum \frac{1}{2^n}$ (GEOMETRICA DI RAGIONE $\frac{1}{2} < 1$) CONVERGE.

IN QUESTO CASO FUNZIONA ANCHE IL CRITERIO DELLA RADICE (Dove verrà $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)} = \frac{1}{2}$)

INFATTI

$$\sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)} = \sqrt[n]{\frac{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n}} \cdot \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n}}}$$

IO SO CHE $\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1$ (per Taylor)

$\Rightarrow \sqrt[n]{2^n \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)} \to 1$ $\Rightarrow$ vale il criterio della radice n-esima con $\ell = \frac{1}{2} < 1$

(Se a_n è (definitivamente) compreso due numeri: $0 < a \leq a_n \leq b < +\infty$ $\Rightarrow$

$\sqrt[n]{a_n} \to 1$)

INVECE NEL CASO PRECEDENTE ($a_n = \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$)
IL CRITERIO DELLA RADICE n-esimo non dice nulla.
IN QUEL CASO $\sqrt[n]{a_n} \to 1$, qualunque sia $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 3}{n^3 + n^2 - 7}$$

DIVERGE

perchè il suo termine generale $a_n = \frac{n^2 - n + 3}{n^3 + n^2 - 7}$

è asintotico a $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ e la serie $\sum \frac{1}{n}$

DIVERGE !!

INVECE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n - 1}{n^4 + 3}$ CONVERGE

$\frac{n^2 + n - 1}{n^4 + 3} \simeq \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sqrt[n]{2}-1\right)}_{a_n}$$

La condizione necessaria vale:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1-1=0$$

Per vedere "L'ORDINE" con cui $a_n \to 0$ scriviamo

$$a_n = e^{\ln\sqrt[n]{2}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln(2)} - 1 = (\text{TAYLOR})$$

$$= 1 + \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{\ln(2)}{n}\right) - 1 \simeq \frac{\ln(2)}{n}$$

termine della serie armonica

$$\ln(2)\sum \frac{1}{n}$$

che diverge

$\Rightarrow$ LA SERIE DIVERGE

Per motivi analoghi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2}-1}{n}$$

CONVERGE. IN EFFETTI

$$\frac{\sqrt[n]{2}-1}{n} \simeq \frac{\frac{\ln(2)}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\ln(2)}{n^2} \quad \left(\text{e so che } \sum \frac{1}{n^2} \text{ conv.}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n}{n!}}_{a_n}$$ CONVERGE (VISTO L'ALTRA VOLTA)

CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$?! : Pongo $a_n = \frac{n!}{n^n}$

e proviamo a usare il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)\cancel{!}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{\cancel{n!}}{n^n}} = \cancel{(n+1)} \frac{n^n}{(n+1)^{n\cancel{+1}}} =$$

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

DATO CHE $\frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE

(IL CRITERIO CI DICE CHE SI POTREBBE CONFRONTARE $a_n = \frac{n!}{n!}$ con A^n dove $\frac{1}{e} < A < 1$)

COSA SI PUÒ FARE NEL CASO DI SERIE CON TERMINI A SEGNO VARIABILE

$\Longrightarrow$ DUE POSSIBILITÀ

(1) CONVERGENZA ASSOLUTA

(2) CRITERIO RIGUARDANTE SERIE "A SEGNI ALTERNI" (CRITERIO DI LEIBNIZ)

Entrambi criteri sufficienti ma non necessari

COMINCIAMO DA (1).

TEOREMA (Criterio della convergenza assoluta)

Data una successione $\{a_n\}$, se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

converge, ALLORA anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge.

SI NOTI CHE $|a_n| \geq 0$, quindi alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ posso applicare i criteri precedenti

DIM. (analogo a quello visto nel caso degli integrali impropri)

Considero a_n^+ e a_n^- (parte positiva / negativa di a_n)

e noto che $0 \le a_n^+ \le |a_n|$

$0 \le a_n^- \le |a_n|$

$a_n = a_n^+ - a_n^-$

Per il confronto, se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge anche

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ CONVERGONO; NE SEGUE CHE

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \right) \quad \text{CONVERGE}$$

Se per esempio considero

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2+1},$$

vedo che $a_n = \frac{\sin(n)}{1+n^2}$

non ha segno costante. PROVO A USARE LA CONV. ASSOLUTA. Considero

$$|a_n| = \frac{|\sin(n)|}{1+n^2} \le \frac{1}{1+n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

(dato che $-1 \le \sin(x) \le 1$).

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, anche $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge

PER IL CRITERIO DELLA CONV. ASSOLUTA, ANCHE

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE.

CON QUESTO SISTEMA NON SI RIESCE A DIRE SE

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ converga o meno, DATO CHE

la convergenza assoluta non si riesce a dim.

$\left| \frac{\sin(n)}{n} \right| \le \frac{1}{n}$ NON SERVE DATO CHE $\sum \frac{1}{n} = +\infty$

e poi non posso dire che $\frac{\sin(n)}{n} \simeq \frac{1}{n}$

<u>NOTA:</u> Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ CONVERGE, si dice che la

serie degli a_n $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

Dunque il teorema di prima ci dice che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{CONVERGE ASSOLUTAMENTE}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{CONVERGE}$$

COME VEDREMO <u>NON</u> vale il viceverso.

VEDIAMO ORA LA POSSIBILITÀ (2).

CONSIDERO UNA SERIE DEL TIPO

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \qquad \text{con} \quad a_n \geq 0$$

IN QUESTO CASO IL TERMINE GENERALE È $(-1)^n a_n$

e tale termine è $\begin{cases} \geq 0 & \text{per gli } n \text{ pari} \\ \leq 0 & \text{per gli } n \text{ dispari} \end{cases}$

UNA SERIE DI QUESTO TIPO SI DICE "A SEGNI ALTERNI"

TEOREMA (Criterio di Leibniz)

Se valgono

- $\{a_n\}$ decresce ($a_{n+1} \leq a_n$)
- $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

(DA CUI SEGUE CHE $a_n \geq 0$), allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) a_n$ è CONVERGENTE

DIM. Quello che vogliamo dimostrare:

"la successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ammette limite finito"

Le somme parziali sono:

$$S_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \cdots + (-1) a_n$$

$$\left(= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k \right)$$

PER DIMOSTRARE L'ESISTENZA DEL LIMITE DI $\{S_n\}$

CONSIDERO SEPARATAMENTE $\{S_{2n}\}$ e $\{S_{2n+1}\}$

- VEDIAMO CHE <u>S_{2n} È DECRESCENTE</u>, INFATTI

$$S_{2(n+1)} = S_{2n+2} = \underbrace{-a_1 + a_2 - \cdots + a_{2n}}_{S_{2n}} - a_{2n+1} + a_{2n+2}$$

$$S_{2n} \underbrace{- a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0 \text{ perché } a_{2n+1} \geq a_{2n+2}} \leq S_{2n}$$

HO DIM. CHE $S_{2n+2} \leq S_{2n}$, cioè $\{S_{2n}\}$ DECRESCE

- ANALOGAMENTE

$$S_{2(n+1)+1} = S_{2n+3} = S_{2n+1} \underbrace{+ a_{2n+2} - a_{2n+3}}_{\geq 0}$$

$$\geq S_{2n+1}$$

CIOÈ LA <u>SUCCESSIONE $\{S_{2n+1}\}$ CRESCE</u>

- INFINE

$$S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n}$$

$$\xrightarrow[S_{2n+1}]{} \qquad \xleftarrow[S_{2n}]{}$$

$$\underset{-a_1}{\underset{\shortparallel}{S_1}} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n+3} \leq S_{2n+2} \leq S_{2n} \leq \underset{-a_1+a_2}{\underset{\shortparallel}{S_2}}$$

• Per i teoremi sulle successioni monotone:

$$S_{2n+1} \to S' \leq S'' \leftarrow S_{2n}$$

PERÒ $\quad S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \longrightarrow 0$

DUNQUE $\quad S' = S'' \; (=: S)$

PER UN VECCHIO TEOREMA SULLE SUCCESSIONI RICAVIAMO

CHE $\quad S_n \to S \quad$, cioè la serie converge #

Allora $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CONVERGE $\forall \alpha > 0$

dato che $\dfrac{1}{n^\alpha}$ tende a zero e <u>decresce</u>.

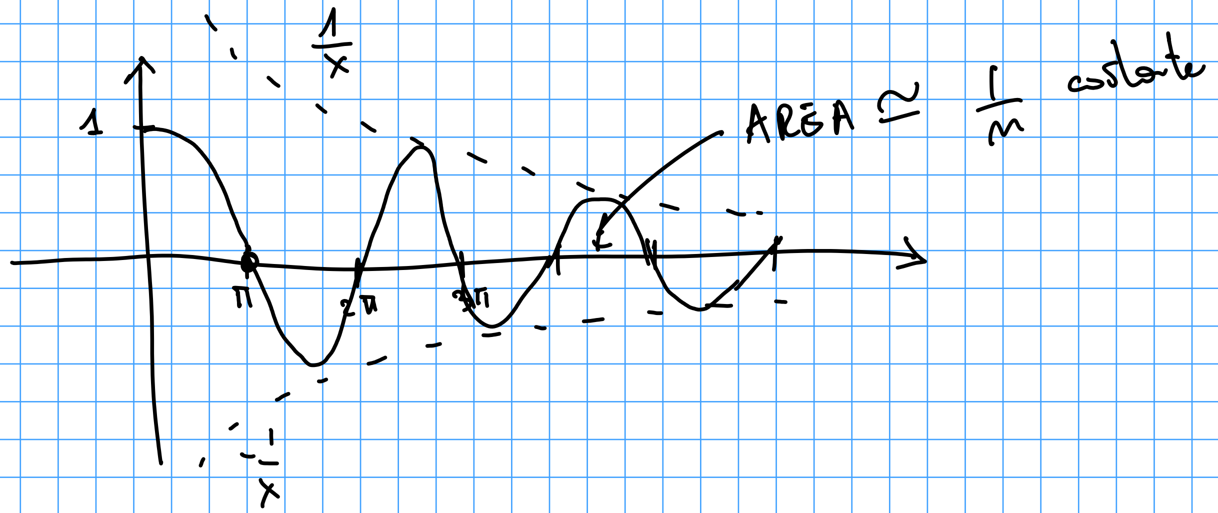
PERÒ SE $0 < \alpha \leq 1$ NON HO LA CONVERGENZA ASSOLUTA dato che $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ DIVERGE per $\alpha < 1$

CASO ANALOGO ALLA INTEGRABILITÀ DI

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\, dx \quad (*)$$

AVEVAMO DETTO per $\alpha \leq 1$ CHE L'INTEGRALE IMPROPRIO $(*)$ È CONVERGENTE (ABEL), MA NON ASSOLUTAMENTE

VEDIAMO CHE $\frac{\sin(x)}{x}$ NON È ASS. INT. SU $[1, +\infty[$



VEDIAMO CHE $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx =$$

$$x = n\pi + y$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{\pi} \frac{|\sin(n\pi + y)|}{n\pi + y}\,dy \geq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{\pi} \frac{|\sin(y)|}{n\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$