Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 32, 13 aprile 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

Serie: dato una successione $\{a_n\}$ chiamo <u>serie</u> la successione delle somme parziali S_n di $\{a_n\}$, cioè

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

La serie converge $\iff$ $\{S_n\}$ ha limite finito; il limite

$\Updownarrow$

($\{a_n\}$ è sommabile)

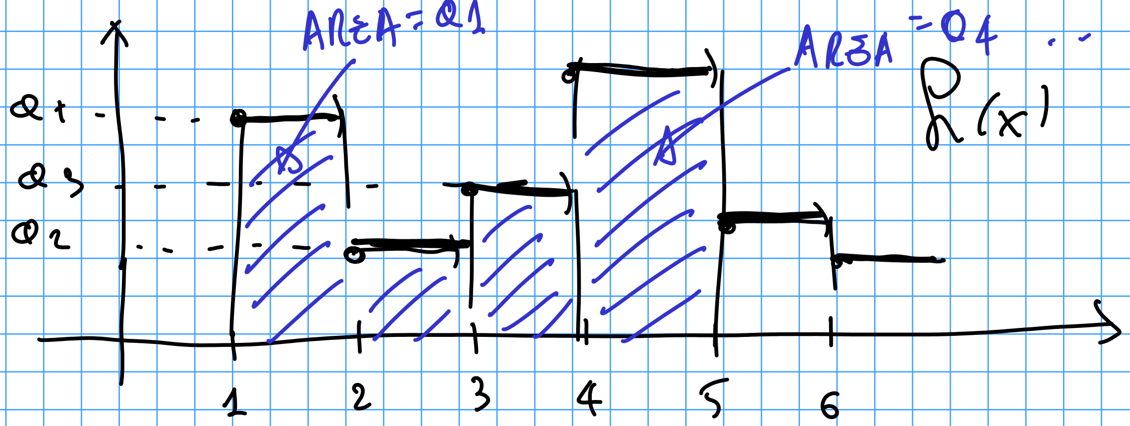
$S = \lim_{n \to \infty} S_n$ si chiama somma della serie degli a_n e si indica con

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

LEGAME TRA SERIE E INTEGRALI IMPROPRI

Dato $\{a_n\}$ posso costruire la "funzione a scalini" $h: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ ponendo

$$h(x) = a_{[x]} \quad \left(= a_n \text{ se } n \leq x < n+1 \right)$$



TEOREMA

La succ. $\{a_n\}$ è sommabile se e solo se la funzione h (costruita a partire da $\{a_n\}$) è integrabile in senso improprio su $[1, +\infty[$. Inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_1^{+\infty} h(x)\,dx$$

DIM. (a) [$\underline{\underline{h \text{ int.}}} \Rightarrow$ serie conv.] Dire che h è int. significa che esiste finito

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^{c} h(x)\,dx = I \quad \left(= \int_1^{+\infty} h(x)\,dx \right)$$

In particolare

$$I = \lim_{m \to \infty} \int_1^{m} h(x)\,dx \quad (\underline{m \in \mathbb{N}}) = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m-1} \int_k^{k+1} h(x)\,dx =$$

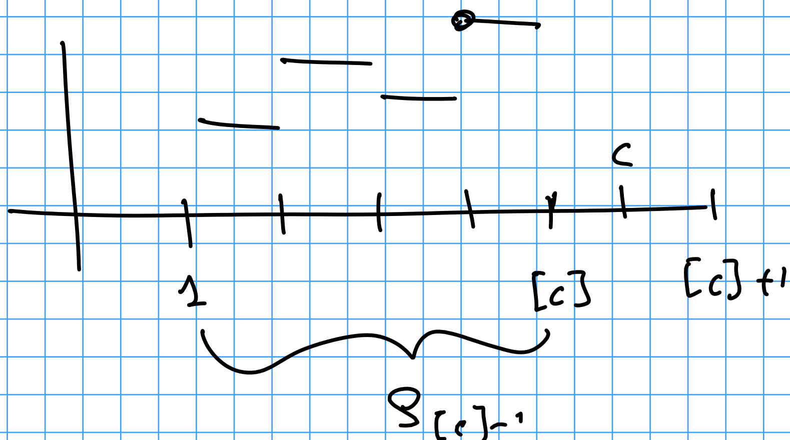
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} a_k\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}$$

DUNQUE $\lim_{n\to\infty} S_n$ esiste e fa I, cioè $\{a_n\}$ è sommabile, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_1^{+\infty} h(x)\,dx$

(b) [se $\sum a_n$ converge $\Rightarrow$ $\int_1 h$ converge].

Suppongo che $\{a_n\}$ sia sommabile. Allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Per $c > 1$ considero $\displaystyle\int_1^c h(x)\,dx = \underbrace{\int_1^{[c]} h(x)\,dx}_{S_{[c]-1}} + \underbrace{\int_{[c]}^{c} h(x)\,dx}_{a_{[c]}(c-[c])}$



$= S_{n-1} + a_n\,(c-[c])$ avendo posto $[c]=n$

LIMITATO TRA ZERO E 1

TENDE A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ TENDE A ZERO

DUNQUE $\lim_{c \to +\infty} \int_1^{c} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad (+\infty)$

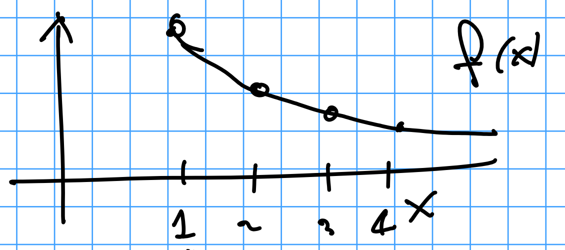
cioè f è integrabile in senso improprio su $[1, +\infty[$ e

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

POSSIAMO ALLORA STUDIARE LA CONV. DI UNA SERIE MEDIANTE I CRITERI PER GLI INT. IMPROPRI

PER ES. SI HA:

TEOREMA Sia $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ con f decrescente e infinitesima a $+\infty$



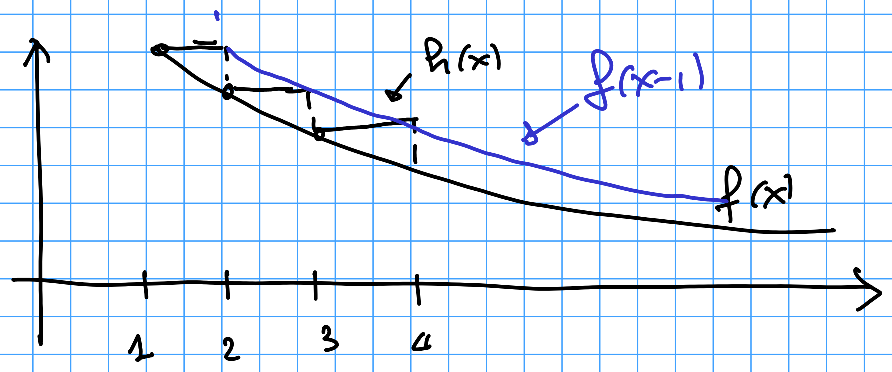
Pongo $a_n = f(n)$ per $n \in \mathbb{N}$

TESI: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE $\Longleftrightarrow$ $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

DIM.

Chiamo $h(x)$ la funzione a scalino:

$$h(x) = a_{[x]} = a_n \text{ se } n \leq x < 1 = f(n) \text{ se } n \leq x < n+1$$



DATO CHE f decresce $\Rightarrow$ $f(x) \leq h(x)$

INOLTRE dato x $\Rightarrow$ $h(x) = f([x]) \leq f(x-1)$

$\left([x] \leq x < [x]+1 \iff x-1 < [x] \leq x \right)$

DUNQUE $\quad f(x) \leq h(x) \leq f(x-1)$

NE SEGUE CHE:

(a) se h è int. su $[1, +\infty[$ $\Rightarrow$ f è int. su $[1 +\infty[$

(b) se f è int. su $[1, +\infty[$ $\Rightarrow$ $f(x-1)$ è int. su $[2, +\infty[$

$\Rightarrow$ h è int. su $[2, +\infty[$ $\iff$ h è int. su $[1 +\infty[$

QUINDI $h(x)$ INT. SU $[1,+\infty[$ $\iff$ $f(x)$ INT. su $[1,+\infty[$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{1}^{M} a_n \quad \text{CONVERGE}$$

<u>OSS</u> NEL TEOREMA PRECEDENTE BASTA CHE $f(x)$ sia DECRESCENTE PER "x GRANDE"

Il teorema ci dà un altro modo di dimostrare che la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ CONVERGE se e solo se $\alpha > 1$ passando per il fatto che $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ converge $\iff \alpha > 1$ $\left(\frac{1}{x^{\alpha}} \text{ DECRESCE} \right)$

<u>ESEMPIO</u> <u>$(\beta > 0)$</u> $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)^{\beta}}$ si può trattare passando alla funzione $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^{\beta}}$. Controlliamo che f è decrescente (per x grande!). Derivo $f(x)$ $\Rightarrow$

$$- \frac{\ln^{\beta}(x) - x\beta \ln(x)^{\beta-1}\frac{1}{x}}{x^2 \ln(x)^{2\beta}} = - \frac{\ln^{\beta}(x) - \beta \ln(x)^{\beta-1}}{x^2 \ln(x)^{2\beta}} =$$

$$- \frac{\ln(x) - \beta}{x^2 \ln(x)^{\beta+1}} < 0 \qquad 2\beta - \beta + 1 = \beta + 1$$

quando $\ln(x) > \beta$!!

DUNQUE la serie converge $\Leftrightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\beta}(x)} dx < +\infty$

$\Leftrightarrow \boxed{\beta > 1}$

NATURALMENTE SI PUÒ DIM. CHE

$$\sum_{n=1}^{?} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta}(n)} \quad \text{CONVERGE} \Leftrightarrow (\alpha > 1) \text{ oppure } [(\alpha = 1) \text{ e } (\beta > 1)]$$

(usando lo stesso metodo).

2 CRITERI (basati sul confronto con la serie geometrica):

criterio della <u>radice</u> / criterio del <u>rapporto</u>

SEMPRE PER SERIE A TERMINI POSITIVI

<u>TEOREMA</u> (CRITERIO DELLA RADICE n-ESIMA)

Sia $\{a_n\}$ con $a_n \geq 0$. Supponiamo che esista

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell .$$

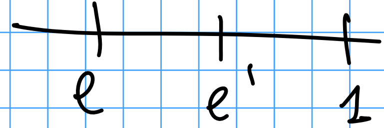
ALLORA: (a) se $0 \leq \ell < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE

(b) se $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGE

(Se $\ell = 1$ non posso dire nulla)

<u>Dim.</u> (a) (caso $\ell < 1$). Prendo ℓ' con $\ell < \ell' < 1$

(per esempio $\ell' = \dfrac{\ell+1}{2}$)



Se $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$ posso trovare $\bar{n}$ tale che

$$\forall n \geq \bar{n} \qquad \sqrt[n]{a_n} \leq \ell'$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall n \geq \bar{n} \qquad a_n \leq (\ell')^n$$

← confronto tra a_n e il termine $(\ell')^n$ ← serie geometrica di ragione <1

Dato che $\ell' < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\ell')^n$ converge

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge per confronto

(b) Se $\ell > 1$ prendo ℓ' con $1 < \ell' < \ell$.

Come prima trovo $\bar{n}$: $\forall n \geq \bar{n} \quad \sqrt[n]{a_n} \geq \ell'$, cioè

$$\forall n \geq \bar{n} \qquad a_n \geq (\ell')^n$$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} (\ell')^n$ DIVERGE $(\ell' > 1) \Rightarrow \sum a_n$ DIVERGE

(Uso il criterio del confronto)

<u>ESEMPI</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$, uso il criterio della radice

$$\sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^5}{2} \longrightarrow \frac{1^5}{2} = \frac{1}{2} \quad \left(\text{RICORDARE CHE } \sqrt[n]{n} \to 1 \,!!\right)$$

DATO CHE $\frac{1}{2} < 1$ la serie $\sum \frac{n^5}{2^n}$ converge.

CON LO STESSO SISTEMA VEDO CHE $(A \geq 0)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n n^\alpha \begin{cases} \text{CONVERGE se } 0 \leq A < 1 \quad \forall \alpha \\ \text{DIVERGE se } A > 1 \quad \forall \alpha \end{cases} \text{CRIT. RADICE}$$

$$\begin{cases} \text{CONVERGE se } A = 1 \text{ e } \alpha < -1 \\ \text{DIVERGE se } A = 1 \text{ e } \alpha \geq -1 \end{cases}$$

DIVENTA LA SERIE ARMONICA $\sum n^\alpha$

<u>NOTA</u>: il criterio della radice funziona se a_n è MOLTO INFINITESIMA

(equivale, per gli integrali impropri, ai casi di $f(x) = e^{-ax}$ con $a > 0$ o sue "perturbazioni" tipo $x^\alpha e^{-ax}$)

SE $\ell = 1$ il criterio non dice nulla. Infatti se

$$a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to \frac{1}{1^2} = 1$$

MA LA SERIE $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CONV. se $\alpha > 1$, DIVERGE se $\alpha \leq 1$

NON LO VEDO SE USO IL CR. DELLA RADICE

CRITERIO DEL RAPPORTO

Dato $\{a_n\}$ con $a_n > 0$. Suppongo che esista

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Allora (a) se $\ell > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGE

(b) se $\ell < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE

(se $\ell = 1$ NON POSSO DIRE NULLA)

DIM. Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to \ell$ (CESARO)

Dunque uso il criterio della radice e ottengo la tesi. #

ESEMPIO $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ $(A \geq 0)$

Se uso il criterio del rapporto devo calcolare il limite di

$$\frac{\dfrac{A^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{A^n}{n!}} = \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{A^n} = \frac{A}{n+1} \to 0$$

Dato che $0 < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ CONVERGE $(\forall A)$

NOTA: il fatto che $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$ $\left(\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to 0\right)$ dice che a_n "è più infinitesima" di qualunque progressione geometrica.
(nell'esempio sopra c'è il fattoriale a denominatore)

VEDREMO CHE $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = e^A$ (usando Taylor)

TORNIAMO AL CALCOLO DI INTEGRALI RICONDUCIBILI (MEDIANTE SOSTITUZIONE) A FUNZIONI RAZIONALI

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

$*$ FORMA GENERALE

$$\int F\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_1}{m_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_k}{m_k}}\right) dx$$

dove $F(x, y_1, \dots, y_k)$ è una funzione razionale

$ad+bc \neq 0$.

USO LA SOSTITUZIONE $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m}}$

dove $m =$ minimo comune multiplo di $m_1 \dots m_k$

$\rightsquigarrow$ TROVO UNA FUNZIONE RAZIONALE DI t

Nell'esempio $\frac{ax+b}{cx+d} = x$ $\quad (a=1 \;\; b=0 \; ; d=1 \; c=0)$

$$F(x, y_1, y_2) = \frac{1}{y_1+y_2} \qquad \begin{array}{l} n_1 = n_2 = 1 \\ m_1 = 2, \; m_2 = 3 \end{array}$$

devo prendere $m = \text{m.c.m.}(2,3) = 6$ e usare la sostituzione

$t = \sqrt[6]{x}$ (DEVO TROVARE UNA FUNZ. RAZ. DI t . . .)

$x = t^6 \qquad dx = 6t^5\,dt \longrightarrow$

$$\int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt = 6\int\frac{t^3+1}{t+1} - 6\int\frac{dt}{t+1}$$

$$= 6\int \frac{\cancel{(t+1)}(t^2-t+1)}{\cancel{t+1}} - 6\int\frac{dt}{t+1} =$$

$$6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t\right) - 6\ln|t+1| + c = 2t^3 - 3t^2 + t - 6\ln|t+1|$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + \text{cost}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$ $\leftarrow$ LO POSSIAMO FARE IN VARI MODI

(I) Notando che $\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow$ radici $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$. Posso allora scrivere

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} = \int \frac{1}{(x-1)} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\, dx$$

e pone $t = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \iff t^2 = \frac{x-1}{x-2}$

$$x t^2 - 2t^2 = x - 1 \iff x(t^2-1) = 2t^2-1$$

$$x = \frac{2t^2-1}{t^2-1} \qquad dx = \frac{4t(t^2-1) - (2t^2-1)2t}{(t^2-1)^2}\, dt = \frac{-2t\, dt}{(t^2-1)^2}$$

$$x-1 = \frac{2t^2-1}{t^2-1} - 1 = \frac{t^2}{t^2-1}$$ da cui l'integrale diventa

$$\int \frac{t^2-1}{t^2}\, \frac{t\,(-2)\,t\, dt}{(t^2-1)^2} = -2\int \frac{dt}{t^2-1} = -\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) + cost = \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}+1}{\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}-1}\right) + cost.$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}\right) + cost = \ln\left(\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right)^2}{(x-1)-(x-2)}\right) + cost$$

$$2\ln\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right) + cost$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}} = ?? \quad \left(\text{SO CHE ESISTE GUARDANDO IL DEN.} \right)^{!-} \quad !!$$

$\boxed{\mathrm{II}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

Scrivo $x^2 - 3x + 2 =$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \frac{(2x-3)^2-1}{4}$$

$$\rightarrow 2\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-3)^2-1}} \qquad y = 2x-3 \iff 2\,dx = dy$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \operatorname{arccosh}(y) + c = \operatorname{arccosh}\left(2x-3\right) + \text{cost}$$

$\boxed{\mathrm{III}}$

Usare la sostituzione

$$\sqrt{x^2-3x+2} = x + t \qquad \left(t = \sqrt{x^2-3x+2} - x \right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{x^2} - 3x + 2 = \cancel{x^2} + 2tx + t^2$$

$$2-t^2 = (2t+3)x \qquad x = \frac{2-t^2}{2t+3}$$

$$dx = \frac{-2t(2t+3)-(2-t^2)2}{(2t+3)^2}\,dt = \frac{-2t^2-6t-4}{(2t+3)^2}\,dt$$

$$x+t = \frac{2-t^2}{2t+3}+t = \frac{2-t^2+2t^2+3t}{2t+3} = \frac{t^2+3t+2}{2t+3}$$

$$\rightarrow \int \frac{2t+3}{t^2+3t+2}\cdot\frac{(-2)(t^2+3t+2)}{(2t+3)^2}\,dt = -2\int\frac{1}{2t+3}\,dt$$

$$= -\cancel{2}\ln|2t+3|\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + \text{cost} =$$

$$-\ln\left(\left|2\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)+3\right|\right)+c =$$

$$-\ln\left|2\sqrt{x^2-3x+2}-2x+3\right|+c$$

$$-\ln\left|2\sqrt{x-1}\sqrt{x-2}-(x-1)-(x-2)\right|+\text{cost} =$$

$$-\ln\left|-\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}\right)^2\right| = -2\ln\left|\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}\right|+\text{cost}$$

QUANDO SI DEVE CALCOLARE $\int F\left(x, \sqrt{x^2+bx+c}\right)dx$

FUNZIONE RAZIONALE

si può provare con la sostituzione $\sqrt{x^2+bx+c} = x+t$

$$\int F(e^{ax})\, dx \qquad \text{con } F \text{ funzione razionale}$$

uso $t = e^{ax}$ e posso ottenere

$$\int \frac{F(t)}{t}\, dt$$

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 5e^{x} + 6}$$

$e^x = t \qquad x = \ln(t)$

$dx = \frac{1}{t}\, dt$

$$\downarrow$$

$$\int \frac{1}{t\,(t^2 - 5t + 6)}\, dt = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} + \frac{C}{t-3} \right) dt$$

. . . . .

$\int F(\sin(x), \cos(x))\, dx$ $\quad$ F funzione razionale

USARE LA SOSTITUZIONE $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow$

$x = 2 \arctan(t)$ $\qquad$ $dx = 2 \frac{dt}{1+t^2}$

$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ $\qquad$ $\cos(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\longrightarrow \int F\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{\sin(x) + \cos(x) + 1}$$

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \longrightarrow \int \frac{2\,dt}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \frac{d}{1+t^2} =$

$$2\int \frac{dt}{2t+1-t^2+1+t^2} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1|+c$$

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

$$\int F(\tan(x))\,dx \qquad \text{uso} \quad t=\tan(x) \quad \dots$$

$$\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\,dx = \int \frac{\tan(x)+1}{\tan(x)-1}\,dx$$

$$t=\tan(x) \qquad x=\arctan(t) \qquad dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\longrightarrow \int \frac{t+1}{t-1}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int\left(\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+c}{1+t^2}\right)dt$$

$$A(1+t^2)+B(t^2-t)+C(t-1) = t+1$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -B + C = 1 \\ A - C = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -A \\ A + C = 1 \\ A - C = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \ln \frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+1}} + c =$$

$$\ln \frac{|\tan(x) - 1|}{\sqrt{\tan^2(x)+1}} + c = \ln \left| \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - 1 \right) \cos(x) \right| + c =$$

$$\ln |\sin(x) - \cos(x)| + c$$

si potrebbe anche usare $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ MA È PIÙ COMPLICATO

$$\int \frac{\tan(x)}{1 + \sin^2(x)} dx = \int \frac{\tan(x)}{2 - \cos^2(x)} dx$$

$t = \tan(x)$

$x = \arctan(t)$

$dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$= \int \frac{t}{2 - \frac{1}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$\int \frac{t}{2+2t^2-1}\,dt = \int \frac{t}{2t^2+1}\,dt =$$

$$\frac{1}{4}\ln\left(2t^2+1\right)+\cos t = \frac{1}{4}\ln\left(2\tan^2(x)+1\right)$$