Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

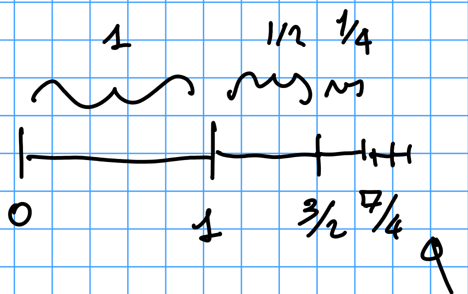
Lezione 31, 12 aprile 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

SERIE

IDEA: SOMMARE TUTTI I (GLI INFINITI) TERMINI DI UNA SUCCESSIONE. PER ESEMPIO

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$$



$1 = 2-1$

$3/2 = 2-1/2$

$7/4 = 2-1/4$

...

VADO A FINIRE IN 2

INFATTI $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n}$ (LO VEDIAMO POI)

DEFINIZIONE

Sia data una successione $\{a_n\}$.

Chiamo SOMMA PARZIALE (o RIDOTTA) n-esima la somma finita dei primi n termini di $\{a_n\}$, cioè

$$S_n = a_1+a_2+\dots+a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

(se a_n comincia da $n=0$ sarà

$$S_n = a_0 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad)$$

DICIAMO CHE $\{a_n\}$ è SOMMABILE oppure che la SERIE DEGLI a_n È CONVERGENTE, se esiste FINITO il limite $\lim_{n\to\infty} S_n \ (= S)$

Tale limite S si chiama SOMMA della serie degli a_n e si indica con $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Molto spesso la scritta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ indica "la serie" intesa come la successione $\{S_n\}$ delle somme parziali

(IL TERMINE "SERIE" è un pò ambiguo)

(serie convergente = successione sommabile (EQUIVALENTI))

DICIAMO CHE la serie è DIVERGENTE se

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty / -\infty$$

IN QUESTO CASO POSSIAMO SCRIVERE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty / -\infty$

Se invece NON esiste il limite delle S_n, si dice che la serie è <u>INDETERMINATA / IRREGOLARE</u>

[serie degli a_n $\longrightarrow$ successione delle somme parziali S_n]

<u>ESEMPI</u>

(1) <u>Serie geometrica</u> Fisso $A \in \mathbb{R}$ (RAGIONE)

e considero $a_n = A^n$. La serie corrispondente "$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$" $(1 + A + A^2 + A^3 + \dots)$ risulta:

CONVERGENTE se $-1 < A < 1$

DIVERGENTE $(A+\infty)$ se $A \geq 1$

INDETERMINATA se $A \leq -1$

INOLTRE se $-1 < A < 1$ la somma della serie geometrica vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \frac{1}{1-A}$$

INFATTI SI HA: (se $A \neq 1$)

$$S_n = 1 + A + \dots + A^n \left(= \sum_{k=0}^{n} A^k \right) = \frac{(1+A+\dots+A^n)(1-A)}{1-A} = \frac{1}{1-A}\left(1 - A^{n+1}\right) = \frac{1}{1-A} - \frac{A^{n+1}}{1-a}$$

(formula nota)

Se faccio tendere n a $+\infty$ vedo che

$$A^{n+1} \begin{cases} \nearrow 0 & \text{se } -1 < A < 1 \\ \to +\infty & \text{se } A > 1 \\ \searrow \text{NON HA LIMITE} & \text{se } A \leq -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la serie converge e la somma vale $\frac{1}{1-A}$

$\Rightarrow$ la serie diverge

la serie è indeterminata

se $A = 1 \Rightarrow S_n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ addendi}} = n+1 \to +\infty$

diverge anche per $A = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \begin{cases} \frac{1}{1-A} & \text{se } -1 < A < 1 \\ +\infty & \text{se } A \geq 1 \\ \text{NON ESISTE} & \text{se } A \leq -1 \end{cases}$$

(2) Altro esempio (più speciale). (MENGOLI) Prendo $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

e voglio sapere cosa fa la serie degli a_n : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

[NOTA : data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gli a_n si chiamano i TERMINI della serie]

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots \frac{1}{n(n+1)} \longrightarrow \ ??$$

NOTO che $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$$S_n = \left(1 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{} \dots + \cancel{\frac{1}{n}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \dots \cancel{} + \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\downarrow$ per $n \to \infty$

1

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

ESEMPIO (SERIE ARMONICA) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ COSA FA ?! DIVERGE

UN MODO PER VEDERE CHE DIVERGE :

$$S_n = (1) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdot \ \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ \frac{1}{16}\right) \quad + \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{array}{ccccc} \geqslant & \geqslant & \geqslant & \geqslant & \geqslant \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} & \underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} & \underbrace{\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} \end{array} \quad \text{e così via}$$

PIÙ PRECISAMENTE:

$$S_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2} \qquad \left(\begin{array}{l} S_{2^0} = S_1 = 1 + \frac{1}{2} \\ S_{2^2} = S_4 \geqslant 1 + \frac{2}{2} \ \dots \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2^n} = +\infty$$

Dato poi che $\lim_{n\to\infty} S_n$ esiste, essendo S_n crescente,

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2^n} = +\infty$$

* estratta di S_n

Alcuni fatti generali:

<u>TEOREMA</u> (CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA)

Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ il termine generale è infinitesimo, cioè $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$[\{a_n\}$ SOMMABILE $\Rightarrow$ $a_n \to 0]$

Dim. Chiamo $S_n = a_1 + \dots + a_n$ (la somma parziale n-esima)

Allora $a_n = S_n - S_{n-1}$ $\Big(= (a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + \dots + a_{n-1})\Big)$

Dunque se $S_n \to S$ ANCHE $S_{n-1} \to S$

per cui SE $S \in \mathbb{R}$ $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$

LA CONDIZIONE NON È SUFFICIENTE: la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ha il termine generale $\frac{1}{n}$ che tende a zero, ma NON CONVERGE

LA CONVERGENZA DI $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è legata a QUANTO RAPIDAMENTE a_n tende a zero.

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2^n} & \text{è ok} \\ a_n = \frac{1}{n(n+1)} \simeq \frac{1}{n} & \text{è ok} \\ a_n = \frac{1}{n} & \text{VA MALE} \end{cases}$$

PER FORMALIZZARE L'IDEA DETTA SOPRA cominciamo con il considerare il caso $a_n \geq 0$

SERIE A TERMINI POSITIVI

TEOREMA Se $a_n \geq 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ può essere solo CONVERGENTE o DIVERGENTE a $+\infty$ (NON PUÒ ESSERE INDETERMINATA)

DIM. Se $a_n \geq 0 \Rightarrow S_n$ è crescente dato che

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

Per il teorema sulle succ. monotone $\Rightarrow$

$$\exists \lim_{n \to \infty} S_n = \sup S_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Le serie a termini positivi hanno sempre un valore (finito o $+\infty$)

TEOREMA (di confronto - per serie a termini ≥ 0).

Siano $\boxed{a_n, b_n \geq 0}$.

(a) Se $a_n \leq b_n$ $\forall n$ (o definitivamente) allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ CONVERGENTE $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGENTE

(e anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGENTE $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ DIVERGENTE)

(b) (confronto asintotico)

Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ $\quad (a_n \simeq b_n)$ ALLORA

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE $\iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ CONVERGE

<u>DIM.</u> (a) Se $a_n \leq b_n$, posto $s_n := a_1 + \dots + a_n$

$S_n := b_1 + \dots + b_n$ si ha $0 \leq s_n \leq S_n$

So che s_n e S_n <u>hanno limite</u>. DUNQUE

- se $S_n \to S \in \mathbb{R}$ anche $s_n \to s \in \mathbb{R}$ $(s \leq S)$
- se $s_n \to +\infty$ anche $S_n \to \infty$

(b) Se $\frac{a_n}{b_n} \to 1 \Rightarrow$ DEFINITIVAMENTE $\frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2$

cioè $\frac{1}{2} b_n \le a_n \le 2 b_n$ per n grande.

Applicando la parte (a) si ottiene la tesi #

ESEMPI • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE.

INFATTI POSSO CONSIDERARE $b_n = \frac{1}{n(n+1)} \left(= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

So che $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ CONVERGE (VISTO PRIMA); inoltre

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n+1}{n} \to 1$$

Dunque $a_n \simeq b_n$, $\sum_1^{\infty} b_n$ CONV. $\Rightarrow \sum_1^{\infty} a_n$ CONV.

• Che comportamento ha la serie "armonica generalizzata"

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{per } \alpha > 0$$

al variare di α !!

CERCO DI IMITARE IL RAGIONAMENTO FATTO QUANDO $\alpha = 2$

PRENDO $\alpha > 1$ e pongo $\boxed{b_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \ge 0}$

Chiaramente $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k =$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha-1} - \sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$$

tende a zero perché $\alpha > 1$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = 1$$

DUNQUE $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ CONVERGE. D'altra parte

$$b_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha-1} - 1\right) =$$

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} - 1\right) = \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\left(\cancel{1} + \frac{\alpha-1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \cancel{1}\right)$$

$$= \frac{(\alpha-1)}{(n+1)^{\alpha-1} n}\left(1+o(1)\right) \simeq \frac{\alpha-1}{n^{\alpha}}$$

USANDO IL CONFRONTO OTTENGO ALLORA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$$ CONVERGE QUANDO $\alpha > 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$ CONV. se $\underline{\alpha > 1}$

<u>TERMINOLOGIA</u> Se $b_n = c_n - c_{n+1}$

(come prima: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$) dico che

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$ è una "SERIE TELESCOPICA".

IN QUESTO CASO $S_n = c_1 - c_{n+1} \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = c_1 - \lim_{n\to+\infty} c_n$$

QUINDI ABBIAMO RICAVATO IL CARATTERE DI $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

MEDIANTE CONFRONTO CON LA SERIE TELESCOPICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right) \quad - \quad \underline{\text{SE } \alpha > 1}.$$

- Se $\alpha = 1$ ABBIAMO GIÀ VISTO CHE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Si potrebbe dimostrare la divergenza usando

$$b_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

Si vede che $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\left(\ln(2) - \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) \right) = +\infty$

MA $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \simeq \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

DA QUESTO RAGIONAMENTO SI INTUISCE CHE,

se $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (somma n-esima della serie armonica)

$\Rightarrow S_n \simeq \ln(n)$ (DIVERGENZA "LENTA")

• $0 < \alpha < 1$ $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ DIVERGE perché è "PEGGIO" di $\frac{1}{n}$; posso dire che $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ $n \geq 1$

e allora dalla divergenza di $\sum \frac{1}{n}$ segue la divergenza di $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

Anche in questo caso potrei far vedere che

$$\frac{1}{n^\alpha} \simeq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha-1} b_n$$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$ anche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$

CON QUESTO RAGIONAMENTO SI INTUISCE che

se $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha}$ allora $S_n \simeq \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$

IN DEFINITIVA LA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

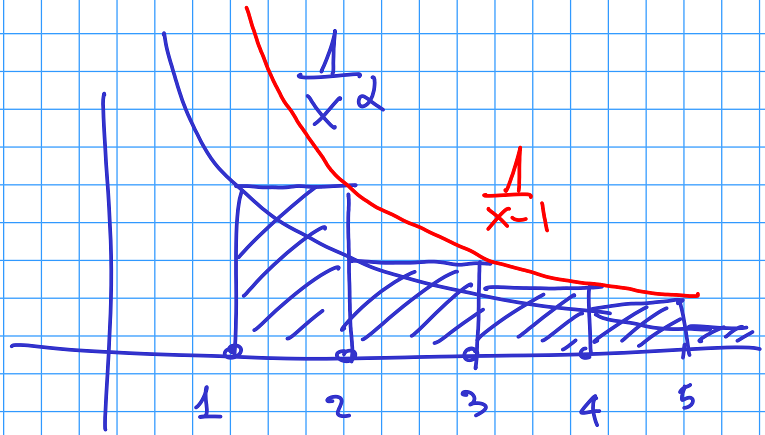
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{CONVERGE} & \alpha > 1 \\ \text{DIVERGE} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

NON SO QUANTO FA LA SOMMA... (per certi α la si conosce usando metodi "avanzati")

NOTARE CHE IL RISULTATO VISTO ORA SOMIGLIA AL COMPORTAMENTO DI

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{CONVERGE se } \alpha > 1 \\ \text{DIVERGE se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

C'È UN LEGAME TRA I DUE RISULTATI



DOMANI