Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 30, 6 aprile 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

CONVERGENZA DI INTEGRALI IMPROPRI

CASO $f \geq 0$ $\rightarrow$ CRITERI DI CONFRONTO:

$\boxed{\text{(confronto asintotico)}}$ Se $f, g \geq 0$, se $f \simeq g$ per $x \to \infty$ $(x \to b)$

cioè $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ $\left(\displaystyle\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \right)$

Allora f è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty[$ $([a, b[)$

SE E SOLO SE

g è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty[$ $([a, b[)$

ALTRI ESEMPI

Consideriamo, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{1 - e^{-x^2}}{x^\alpha (1 + x^5)}}}_{f(x)} \, dx$$

DOMANDA: Per quali valori di α $(\in \mathbb{R})$ l'integrale è convergente

① $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ per $x \to 0$ $\displaystyle f(x) \simeq \frac{1}{x^{\alpha-2}} =: g(x)$

g è integrabile su $]0,1]$ $\iff$ $\alpha - 2 < 1 \iff \boxed{\alpha < 3}$

② $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x^\alpha(1+x^5)}\,dx$

$1-e^{-x^2} \to 1$ per $x \to +\infty$. INOLTRE

$$f(x) = \frac{1-e^{-x^2}}{x^\alpha \; x^5} \frac{1}{(o(1)+1)} \simeq \frac{1}{x^{\alpha+5}} \left(=: g_1(x)\right) \left(\text{per } x \to +\infty\right)$$

$g_1(x)$ è integrabile a $+\infty$ $\iff$ $\alpha + 5 > 1 \iff \boxed{\alpha > -4}$

IN DEFINITIVA $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE $\iff$ $\boxed{-4 < \alpha < 3}$

(NOTA CHE SE $\alpha < 2 \Rightarrow f(x) \to 0$ per $x \to 0$
$\alpha = 2 \Rightarrow f(x) \to 1$ per $x \to 0$

e quindi f è integrabile secondo Riemann su $[0,1]$)

ESEMPIO SIMILE $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)+x^2}{x^\alpha(1+x^3)\sqrt{|x-1|}}\,dx$

$f(x)$

CI SONO QUATTRO problemi di integrabilità in senso: devo trattare separatamente (per come ho definito l'integrale improprio)

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx, \quad \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx, \quad \int_1^{2} f(x)\,dx, \quad \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$$

① VEDIAMO SUBITO IL COMPORTAMENTO DI $f(x)$ per $x \to 1^+/1^-$

Si vede subito che

$$f(x) \simeq \underbrace{\frac{\sin(1)+1^2}{1^\alpha\,(1+1^3)}}_{c\ (\text{numero})} \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} \quad (=: g(x))$$

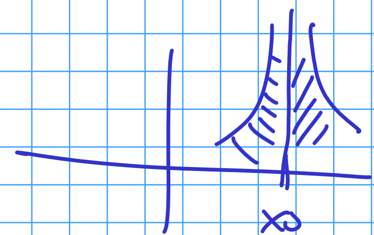
Se pongo $g(x) = \dfrac{c}{\sqrt{|x-1|}} = \dfrac{c}{|x-1|^{1/2}}$

io so che $\int_{1/2}^{1} g(x)\,dx \;/\; \int_1^2 g(x)\,dx$ CONVERGE $\left(\frac{1}{2} < 1 \;!!\right)$

FATTO NOTO: $\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\,dx \leftarrow$ CONVERGE $\Longleftrightarrow \alpha < 1$

$(x_0 \in \mathbb{R})$

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\,dx$$



$\int_{1/2}^{2} f(x)\,dx$ converge $\forall \alpha$

② $\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} \frac{\sin(x) + x^2}{x^\alpha \sqrt{|x-1|}\,(1+x^3)}\,dx$

Se $x \to 0$ $f(x) = \frac{\sin(x) + x^2}{x^\alpha}(1+o(1)) = \frac{x + \overbrace{o(x) + x^2}^{o(x)}}{x^\alpha}(1+o(1))$

$\frac{x\,(1+o(1))}{x^\alpha}(1+o(1)) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}(1+o(1)) \simeq \frac{1}{x^{\alpha-1}} =: g(x)$

SO CHE $\int_0^{1/2} g(x)\,dx$ CONVERGE $\iff \alpha - 1 < 1 \iff \boxed{\alpha < 2}$

③ $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$. Se $x \to +\infty$

$f(x) = \frac{x^2}{x^\alpha \sqrt{x}\, x^3} \cdot \frac{\left(\frac{\sin(x)}{x^2} + 1\right)}{\sqrt{\left|1-\frac{1}{x}\right|}\left(\frac{1}{x^3}+1\right)} = \frac{x^2}{x^\alpha \sqrt{x}\, x^3}(1+o(1)) =$

$\frac{1}{x^{\alpha+\frac{3}{2}}}(1+o(1)) \simeq \frac{1}{x^{\alpha+\frac{3}{2}}} =: g_1(x)$

esponente $\alpha - 2 + \frac{1}{2} + 3$

SAPPIAMO CHE $\int_2^{+\infty} g_1(x)\,dx$ CONVERGE $\iff \alpha + \frac{3}{2} > 1 \iff \boxed{\alpha > -\frac{1}{2}}$

IN DEFINITIVA $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE $\iff \boxed{-\frac{1}{2} < \alpha < 2}$

ALTRO ESEMPIO (ABBASTANZA IMPORTANTE)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \frac{1}{\ln^\beta(x)}\,dx = ??$$ QUANDO CONVERGE (PER QUALI α, β)

① SE $\alpha \neq 1$ β NON CONTA , CIOÈ

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}\,dx$$
↗ CONVERGE SE $\alpha > 1$ $\forall \beta \in \mathbb{R}$
↘ DIVERGE SE < 1 $\forall \beta \in \mathbb{R}$

INFATTI: SE $\alpha > 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ CONVERGE , MA SO ANCHE CHE $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha_1}}\,dx$ CONVERGE PER $1 < \alpha_1 \leq \alpha$

(PER ESEMPIO PRENDIAMO $\alpha_1 = \frac{1+\alpha}{2}$ $\quad 1 < \alpha_1 < \alpha$)

$x^{\alpha-\alpha_1}$ VINCE $\forall \beta \in \mathbb{R}$

INOLTRE $\frac{1}{x^{\alpha-\alpha_1} \ln^\beta(x)} \to 0$ per $x \to +\infty$

$(\alpha - \alpha_1 > 0 \;!!)$

(NON BANALE QUANDO $\beta < 0$)

ALLORA $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} = \underbrace{\frac{1}{x^{\alpha_1}}}_{\text{INTEGRABILE}} \underbrace{\frac{1}{x^{\alpha-\alpha_1} \ln^\beta(x)}}_{\text{INFINITESIMA} (\Rightarrow \underline{\text{LIMITATA}})}$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} \leq \frac{\text{COSTANTE}}{x^{\alpha_1}}$

$(x \geq 1)$

INTEGRABILE

$\Rightarrow$ ($\underline{\text{CONFRONTO}}$) $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$ INTEGRABILE

- SE INVECE $\alpha < 1$ – CON UN RAGIONAMENTO ANALOGO – DIMOSTRO CHE $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$ NON È INTEGRABILE $\forall \beta$

2

$\alpha = 1$ $\quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\beta(x)} dx$ CONVERGE $\iff$ $\underline{\beta > 1}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{\ln^\beta(x)} dx$$

SOSTITUISCO $y = \ln(x)$
NOTANDO CHE $\frac{dx}{x} = dy$

$$\shortparallel$$

$$\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{y^\beta} dy$$ CONVERGE $\iff$ $\beta > 1$

IDEA: (SE $x \to +\infty$) $\frac{1}{x} \frac{1}{\ln^\beta}$ $\quad (\beta > 0)$

"MEGLIO" DI $\frac{1}{x}$ $\quad$ "PEGGIO" DI $\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ $\forall \varepsilon > 0$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} dx$$ CONVERGE $\iff$ $\alpha > 1$ OPPURE $(\alpha = 1)$ e $(\beta > 1)$

ANALOGAMENTE

$$\int_0^{1/2} \frac{|\ln(x)|^\beta}{x^\alpha}\,dx \quad \text{CONVERGE} \iff \alpha < 1 \quad \text{OPPURE} \quad \alpha = 1 \text{ e } \beta < -1$$

CASO $\alpha = 1 \rightarrow \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{|\ln(x)|^\beta}{x}\,dx$ SOSTITUISCO $y = \ln(x)$

$$\int_{-\infty}^{\ln(1/2)} |y|^\beta\,dy = \int_{-\infty}^{\ln(1/2)} \frac{1}{|y|^{-\beta}}\,dy \quad \text{CONVERGE se } -\beta > 1$$

$$\left(= \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{y^{-\beta}}\,dy \right)$$

MEGLIO

$$\boxed{\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha \ln^{\beta_2} x}\,dx \quad \text{CONVERGE} \iff \alpha < 1 \quad \text{OPPURE} \quad \alpha = 1 \text{ e } \beta_1 > 1}$$

FINORA ABBIAMO STUDIATO FUNZIONI ≥ 0

COSA FARE SE f CAMBIA SEGNO ??

DUE RISPOSTE

① PASSARE A $|f|$ ($\to$ CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA)

② CRITERI "DI ABEL" (se f ha una forma speciale)

TEOREMA (CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA)

Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ t.c. che f è integrabile su ogni $[a,c] \subset [a,b[$

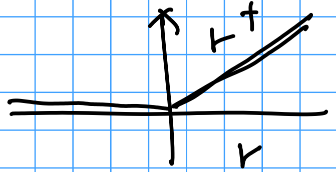
Se $\int_a^b |f(x)|\, dx$ CONVERGE $\Rightarrow$

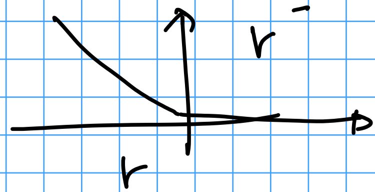
$\int_a^b f(x)\, dx$ CONVERGE

DIM.

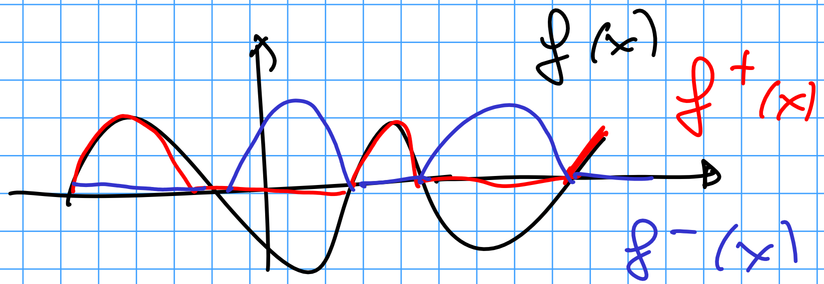
Scrivo $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ DOVE

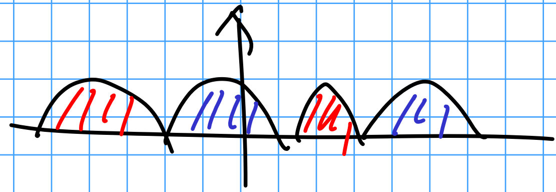
$$r^+ := \begin{cases} r & \text{se } r \geq 0 \\ 0 & \text{se } r \leq 0 \end{cases} \qquad r^- := \begin{cases} 0 & \text{se } r \geq 0 \\ -r & \text{se } r \leq 0 \end{cases} \qquad (r \in \mathbb{R})$$





NOTA: $\boxed{\begin{array}{l} r = r^+ - r^- \\ |r| = r^+ + r^- \end{array}}$





Dato che $f^+(x) \geq 0$ $f^-(x) \geq 0$ posso usare il criterio del confronto con

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x) \geq \begin{cases} f^+(x) \\ f^-(x) \end{cases}$$ cioè

$$0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|$$

$$0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|$$ DUNQUE

SE $\int_a^b |f(x)|\,dx$ CONVERGE $\Longrightarrow$ CONVERGONO (SEPARATAMENTE)

$\int_a^b f^+(x)\,dx$ e $\int_a^b f^-(x)\,dx$

$\Rightarrow$ CONVERGE ANCHE $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx$

SI INTUISCE CHE LA CONDIZIONE $\int_a^b |f|\,dx$ CONV. È SUFFICIENTE MA NON NECESSARIA: POTRÀ SUCCEDERE (POI LO VEDIAMO) CHE

$\int_a^b f(x)\,dx$ CONV. MA $\int_a^b |f(x)|\,dx$ DIVERGE

DEFINIZIONE SE $\int_a^b |f(x)|\,dx$ CONV. SI DICE CHE

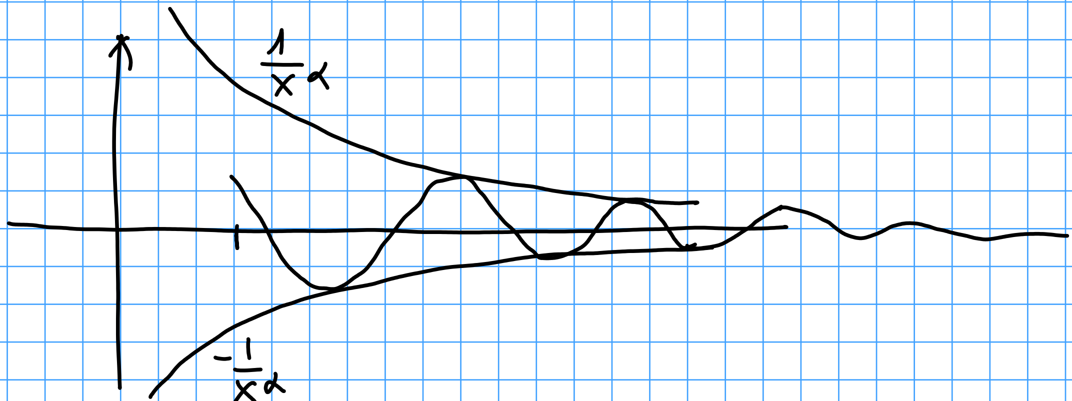
$\int_a^b f(x)\,dx$ È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

DUNQUE IL TEOR. PRECEDENTE AFFERMA:

$\int_a^b f(x)\,dx$ ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGENTE

ESEMPIO

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,dx \qquad \alpha>0$$



PROVO CON LA CONV. ASSOLUTA : devo passare a

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha}\,dx$$ ← QUI POSSO USARE IL CONFRONTO

$$\frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}$$

SE $\boxed{\alpha > 1}$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ CONVERGE $\overset{\text{CONFRONTO}}{\Rightarrow}$ $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha}\,dx$ CONVERGE $\overset{\text{CONV. ASS.} \Rightarrow \text{CONV.}}{\Rightarrow}$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,dx$ CONV. (ANZI CONVERGE ASSOLUTAM.)

DA QUANTO FATTO SOPRA <u>NON</u> SI RICAVA CHE PER $\alpha \le 1$

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$ NON CONV.

(b) $- \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$ NON È ASS CONV.

PROVIAMO A VEDERE SE (CON CALCOLI OPPORTUNI LEGATI ALLA FUNZIONE PARTICOLARE) SAPPIAMO DIRE COSA SUCCEDE PER $\alpha \leq 1$

(a) prendo $c > 1$ e considero

$$\int_1^c \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,dx \underset{\text{PER PARTI}}{=} \left[\frac{-\cos(x)}{x^\alpha}\right]_1^c - \int_1^c -\cos(x)\frac{(-\alpha)}{x^{\alpha+1}}\,dx =$$

$$\underbrace{\frac{-\cos(c)}{c^\alpha} - \frac{-\cos(1)}{1^\alpha}}_{1} + \alpha \underbrace{\int_1^c \frac{-\cos(x)}{x^{\alpha+1}}\,dx}_{2} \qquad (\alpha > 0)$$

IL PEZZO 1 TENDE A $\cos(1)$ per $c \to +\infty$ perché $|\cos(c)| \leq 1$
e $c^\alpha \to +\infty$

IL PEZZO ② HA LIMITE FINITO perché

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}}\, dx$ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE in quanto

$$\left| \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}} \right| \leq \frac{1}{x^{\alpha+1}} \quad e \quad \alpha+1 > 1$$

DUNQUE $\lim_{c \to +\infty} \int_1^{c} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}\, dx$ ESISTE FINITO

$$\Big(\text{ANZI FA} \quad -\cos(1) + \alpha \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}}\, dx}_{\text{ASS. CONV.}} \Big)$$

$\Rightarrow$ HO TROVATO CHE $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}\, dx$ CONVERGE $\forall \alpha > 0$

(LA CONV. È ASSOLUTA "solo" per $\alpha > 1$)

(b) SI VEDE (ci torneremo sopra) CHE

$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}} \right| dx$ DIVERGE per $\alpha \leq 1$

DUNQUE $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$ quando $0 < \alpha \leq 1$

CONVERGE MA NON ASSOLUTAMENTE

LA CONV. ASSOLUTA È UNA PROPRIETÀ PIÙ FORTE DELLA CONVERGENZA.

"ALTERNATIVA ALLA CONV. ASSOLUTA" → CRITERIO DI "ABEL"

TEOREMA Suppongo che $f(x) = a(x)\, b(x)$ dove

- a derivabile, $a' \leq 0$, $\lim_{x \to b} a(x) = 0$
- b continua, $b = B'$ con B limitata

(pensare a $a(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $b(x) = \sin(x)$ $\Rightarrow B(x) = \cos(x)$)

Allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b a(x)\, b(x)\,dx$ CONVERGE

DIM. Prendo $c \in [a, b[$ e considero

$$\int_a^c a(x)\,b(x)\,dx \underset{\text{(PER PARTI)}}{=} \underbrace{\Big[a(x)\,B(x)\Big]_a^c}_{①} - \underbrace{\int_a^c a'(x)\,B(x)\,dx}_{②}$$

① tende a $-a(a)\,B(a)$ perché $\lim_{c \to b} a(c)\,B(c) = 0$

essendo $a(c) \to 0$ e $B(c)$ limitata

② ha limite finito perché $\int_a^b a'(x)\,B(x)\,dx$ è

assolutamente convergente. Infatti $\forall\ c < b$

$$\int_a^c |a'(x)\,B(x)|\,dx \leq \max_{[a,b]} B(x) \int_a^c \underbrace{|a'(x)|}_{-a'(x)}\,dx =$$

$$\max B\,\big(a(a) - a(c)\big) \xrightarrow{c \to b} \max B\; a(a)$$

IN DEFINITIVA $\lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\,dx$ esiste finito

TIPICAMENTE $b(x) = \sin(x) / \cos(x)$ $\Rightarrow$

se $a' \leq 0$ e $a(x) \to 0$ per $x \to +\infty$

$$\int_a^{+\infty} \sin(x)\, a(x)\, dx \quad / \quad \int_0^{+\infty} \cos(x)\, a(x)\, dx$$

CONVERGONO (IN GENERALE NON ASS. CONV.)

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha)\, dx \qquad \boxed{\alpha > 1}$$

Prendo $c < +\infty$ e considero

$$\int_0^c \sin(x^\alpha)\, dx$$

cambio di variabile $y = x^\alpha$

$x = y^{\frac{1}{\alpha}}$ $\quad dx = \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1}$

$$\| $$

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{c^\alpha} \sin(y)\, y^{\frac{1}{\alpha}-1}\, dy$$

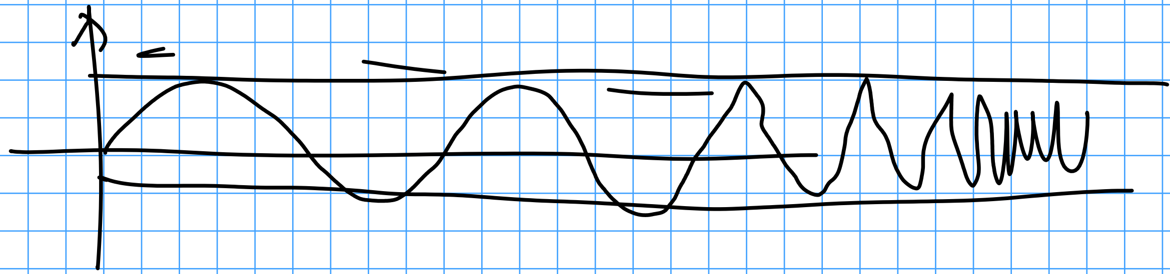
$$-1 < \underbrace{\frac{1}{\alpha} - 1}_{-\beta} < 0$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{c^2} \frac{\sin(y)}{y^\beta}\,dy$$ CONVERGE $0<\beta<1$

(ANCHE SE - PROBABILMENTE - NON È A.C)

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ CONVERGE anche se continua a oscillare tra -1 e 1

($\Rightarrow$ NON TENDE A ZERO se $x \to +\infty$)



il limite non esiste

(PEZZI POSITIVI E PEZZI SI COMPENSANO!!)

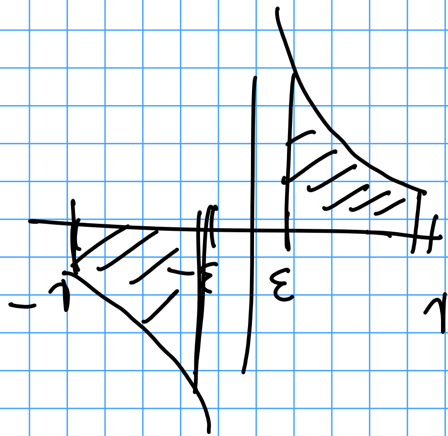
COMMENTO SULLA DEF. DI INT. IMPROPRIO

DALLA DEF. SI RICAVA CHE $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ NON CONVERGE

PERCHÉ LA CONV. DI TALE INTEGRALE CORRISPONDE (PER COME ABBIAMO DEFINITO L'INTEGRALE) ALLA CONV. SEPARATA DI $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx$ $\to -\infty$ $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ $\to +\infty$

SI POTREBBE PENSARE DI DEFINIRE

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[-1,1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{1}{x}\, dx$$



COSÌ FACENDO TROVEREI ZERO

IN EFFETTI SI CHIAMA "INTEGRALE NEL SENSO DEL VALORE PRINCIPALE"

$$(V.P.) \int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx \right) = 0$$

(IN QUESTO MODO

$$(V.P.) \int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\, dx = \int_{1}^{2} \frac{1}{x}\, dx = \ln(2)$$)

QUESTA DEF. È UTILE IN CERTI CASI MA È MOLTO "INSTABILE" E SI BASA SULL'IDEA DI TOGLIERE UN INTERVALLO SIMMETRICO INTORNO ALLA SINGOLARITÀ.

SI NOTI CHE

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{2\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\left[\ln|x|\right]_{-1}^{-\varepsilon} + \left[\ln|x|\right]_{2\varepsilon}^{1} \right)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln\varepsilon - \underset{0}{\underset{\parallel}{\ln(1)}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{\ln(1)}} - \ln(2\varepsilon) \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \frac{\varepsilon}{2\varepsilon} = \ln\frac{1}{2}$$

INVECE SE f è veramente integrabile su $[1, 1]$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-1}^{-a\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{b\varepsilon}^{1} f(x)\,dx \right) = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$ qualunque siano a, b (>0)

ALCUNE FUNZIONI IRRAZIONALI CHE SI RICONDUCONO (CON UNA OPPORTUNA SOSTITUZIONE) A FUNZIONI RAZIONALI

SUPPONIAMO CHE $F(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc \neq 0$

P, Q polinomi (F funzione razionale di due variabili)

$\int F\left(x, \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ si riconduce a una funzione

razionale di x mediante la sostituzione $t = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \, dx$$

$$\left(F(x,y) = \frac{y}{x^2} \right)$$

sostituzione $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = t$

$$t^2 = \frac{x+1}{x-1} \qquad x t^2 - t^2 = x + 1$$

$$x(t^2-1) = t^2+1 \qquad x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$

$$dx = \frac{2t(t^2-1) - (t^2+1)2t}{(t^2-1)^2} dt = \frac{-4t\,dt}{(t^2-1)^2}$$

$$\rightarrow \int_{+\infty}^{1} \frac{\cancel{(t^2-1)^2}}{(t^2+1)^2}\, t\, \frac{(-4t)\,dt}{\cancel{(t^2-1)^2}} = 4\int_{1}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$$

$$\frac{4t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\,\frac{Ct+D}{t^2+1} =$$

$$\frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C(t^2+1)-(Ct+D)2t}{(t^2+1)^2} =$$

$$\frac{A(t^3+t)+B(t^2+1)-Ct^2-2Dt+C}{(t^2+1)^2}$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B - C = 4 \\ A - 2D = 0 \\ B + C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 0 \quad D = 0 \\ B = 2 \\ C = -2 \end{cases} \qquad \text{TROVO}$$

$$\int_{1}^{+\infty} \left(\frac{2}{1+t^2} - 2\frac{d}{dt}\,\frac{t}{1+t^2} \right) dt =$$

$$\left[2\arctan(t)\right]_1^{+\infty} - 2\left[\frac{t}{1+t^2}\right]_1^{+\infty} = \pi - \frac{\pi}{2} + 1 = \boxed{\frac{\pi}{2}+1}$$