Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 29, 5 aprile 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

Esercizio Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\tan^2(x) + 2\tan(x) + 2}\, dx$$

NOTA: (A PRIORI) è un int. improprio perché $\tan(x)$ non è definita in $x = \frac{\pi}{2}$ - se $x \neq \frac{\pi}{2}$ la $\tan(x)$ è ben definita e

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\tan^2(x) + 2\tan(x) + 2}}$$

è ben definita, dato che il polinomio $y^2 + 2y + 2$ è $\neq 0$ $\forall y$

IN REALTÀ $f(x) \to 0$ per $x \to \frac{\pi}{2}$ (perché $\tan(x) \to +\infty$ e $\lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y^2 + 2y + 2} = 0$: se pongo $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ ho una funzione continua $\Rightarrow$ f integrabile su $[0, \pi/2]$

IN OGNI CASO, per calcolare l'integrale, si deve calcolare

$$\lim_{c \to \pi/2} \int_0^c f(x)\, dx$$

CONVIENE USARE LA SOSTITUZIONE $t = \tan(x)$

$x = \arctan(t) \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \Rightarrow$

INTEGRALE $= \lim_{c \to \frac{\pi}{2}} \int_0^{\tan(c)} \frac{1}{t^2+2t+2} \frac{1}{t^2+1}\, dt =$

$\lim_{c' \to +\infty} \int_0^{c'} \frac{1}{t^2+2t+2} \frac{1}{1+t^2}\, dt \qquad \Big(= \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{t^2+2t+2} \cdot \frac{1}{1+t^2}}_{(*)}\, dt \Big)$

INT. IMPROPRIO

CALCOLIAMO LE PRIMITIVE: (Richiedono in fratti semplici)

$$(*) = \frac{At+B}{t^2+2t+2} + \frac{Ct+D}{t^2+1} =$$

$$\frac{A(t^3+t) + B(t^2+1) + C(t^3+2t^2+2t) + D(t^2+2t+2)}{(t^2+2t+2)(t^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ B + 2C + D = 0 \\ A + 2C + 2D = 0 \\ B + 2D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -A \\ B = 1 - 2D \\ 1 - 2D - 2A + D = 0 \\ A - 2A + 2D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -A \\ B = 1 - 2D \\ 2A + D = 1 \\ -A + 2D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 2D, \quad C = -A, \quad B = 1 - 2D \\ 5D = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} D = 1/5 \quad A = 2/5 \\ C = -2/5 \quad B = 3/5 \end{cases}$$

$$\frac{1}{5}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2t+3}{t^2+2t+2} + \frac{-2t+1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$\frac{1}{5}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2t+2}{t^2+2t+2} + \frac{1}{t^2+2t+2} - \frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$\underbrace{\frac{1}{5}\left[\ln\frac{t^2+2t+2}{t^2+1}\right]_0^{+\infty}}_{\frac{1}{5}\lim_{c\to+\infty}\left[\ln\frac{t^2+2t+2}{t^2+1}\right]_0^{c}} + \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+1)^2+1} + \left[\arctan(t)\right]_0^{+\infty} =$$

$$\frac{1}{5}\ln(1) - \frac{1}{5}\ln(2) + \left[\arctan(t+1)\right]_0^{+\infty} + \frac{\pi}{2} - \arctan(0) =$$

$$-\frac{1}{5}\ln(2) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{5}\ln(2)}$$

TORNIAMO A PARLARE DI INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

(se f è illimitata vicino a b)

$$= \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

(se f è illimitata vicino ad a)

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

SE CI SONO PIÙ PUNTI DI SINGOLARITÀ SI SPEZZA L'INTERVALLO IN MODO DA TRATTARE UNA SINGOLARITÀ ALLA VOLTA:

Per esempio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\,dx$ si vede come

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx$$

(INVECE DI 1 potrei usare un qualunque numero $a>0$)

DICO CHE L'INTEGRALE "COMPLESSIVO" CONVERGE SE TUTTI I PEZZI IN CUI LO SCOMPONGO RISULTANO CONVERGENTI.

NELL'ESEMPIO SOPRA SI PUÒ VEDERE CHE L'INTEGRALE CONVERGE.

PER CALCOLARE ESPLICITAMENTE TALE INT. si uso la sostituzione $\sqrt{x} = y$ $\quad x = y^2 \quad dx = 2y\,dy \Rightarrow$

TROVO $\displaystyle \frac{2y}{y(y^4+1)}\,dy = \frac{2}{y^4+1}\,dy$ che mi dà

i due integrali:

$$\int_0^1 \frac{2\,dy}{1+y^4} \quad e \quad \int_1^{+\infty} \frac{2\,dy}{1+y^4}$$

CONVERGE (È UN INT. DI RIEMANN)

CONVERGE (si potrebbe fare il calcolo)

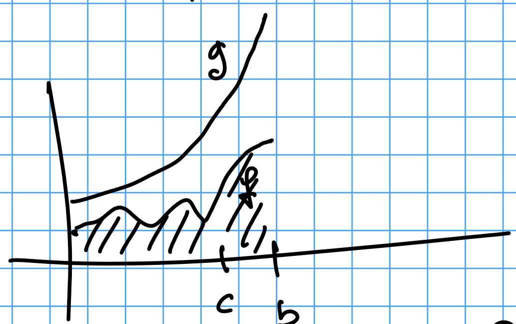
SI PUÒ ESSERE SICURI DELLA CONVERGENZA DEL II° INT. , SENZA CALCOLARLO ESPLICITAMENTE, RICORRENDO AL SEGUENTE

CRITERIO DI CONFRONTO

TEOREMA (CRIT. CONFR.) Se f e g sono definite su $[a,b[$ / $(]a,b])$, integrabili secondo R su ogni $[c,b]$ con $c>a$ ($[a,c]$ con $c<b$), se

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \quad (\text{BASTA PER LE } x \text{ VICINO A } b)$$

e se g è integrabile in senso improprio su $[a,b[$ $(]a,b])$, ALLORA ANCHE f è int. in senso imp.



DIM. NOTO CHE $\lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\,dx$ ESISTE IN QUANTO la funzione $F(c) := \int_a^c f(x)\,dx$ è monotona crescente (essendo $f \geq 0$). Dunque per dimostrare l'integrabilità devo dimostrare che questo limite è FINITO. Ma

$$\lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\,dx \le \lim_{c \to b} \int_a^c g(x)\,dx \leftarrow \text{FINITO PER IPOTESI}$$

DUNQUE per vedere che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$ è convergente basta notare che:

$$0 \le \frac{1}{1+x^4} \le \frac{1}{x^4}$$

e ricordare che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge per $\alpha > 1$

<u>TEOREMA</u> (CRITERIO DI CONFRONTO ASINTOTICO)

Se f, g int. su ogni $[a, c] \subset [a, b[$, se $f, g \ge 0$ e se

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \left(\text{cioè } f(x) \simeq g(x) \text{ per } x \to b\right)$$

ALLORA:

f integrabile in s. i. su $[a, b[\iff g$ int. in s. i. su $[a, b[$

DIM. Basta notare che, se $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2 \qquad \text{per } b-\delta \leq x < b$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \frac{g(x)}{2} \leq f(x) \leq 2\, g(x) \qquad \text{per } x \text{ vicino a } b$$

A QUESTO PUNTO USO IL CRIT. DEL CONFRONTO e deduco la tesi (per es. se $f(x)$ è int $\Rightarrow \frac{g(x)}{2}$ è int $\Rightarrow$ $g(x)$ è int - IN S.I.)

NELL'ESEMPIO PRECEDENTE, PER VEDERE CHE $\frac{1}{1+x^4}$ è integrabile in senso imp. su $[1, +\infty[$ basta notare che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^4}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{1+x^4} = 1$$

e usare il fatto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\, dx$ converge

Con questo sistema anche

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4-2x^2+2}$$ è convergente dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^4-2x^2+2} = 1 \quad \ldots\ldots$$

NOTA Nel confronto asintotico posso sostituire

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \text{con} \quad \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \delta$$

con $0 < \delta < +\infty$

cioè $f(x) \simeq \delta\, g(x)$

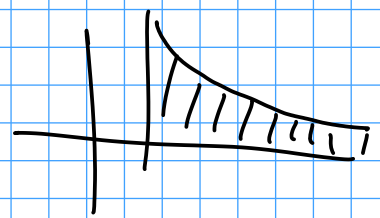
ATTENZIONE : confronto/confronto asintotico

sono veri se le funzioni sono POSITIVE (NEGATIVE)

vicino a b (SI POSSONO FARE CONTROESEMPI)

DOMANDA Se f è integrabile su $[a, +\infty]$

posso concludere che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$



IN EFFETTI VALE

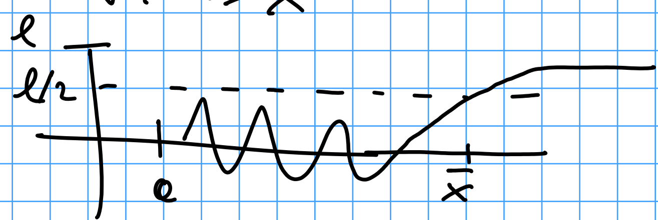
TEOREMA Se esiste $\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ e se f è int. in s. improprio su $[a, +\infty[$ ALLORA

$\ell = 0$

PERÒ POTREBBE succedere che $\nexists \lim_{x \to +\infty} f(x)$

Dim. Per assurdo supponiamo $\ell > 0 \Rightarrow$ esiste $\bar{x}$ tale che

$$f(x) \geq \frac{\ell}{2} \quad \forall x \geq \bar{x}$$



Allora, se $c > \bar{x}$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{\bar{x}} f(x)\,dx + \int_{\bar{x}}^c f(x)\,dx \geq$$

$$\int_a^{\bar{x}} f(x)\,dx + \frac{\ell}{2}(c-\bar{x}) \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx \geq \int_a^{\bar{x}} f(x)\,dx + \lim_{c \to +\infty} \frac{\ell}{2}(c-\bar{x}) = +\infty$$

f NON È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO

(Stesso discorso se fosse $\ell < 0$)

VEDIAMO CHE f PUÒ essere integrabile all'infinito senza che esista $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

ESEMPIO

$$f(x) = |\sin(x^\alpha)|$$

(metto il valore assoluto solo perché finora abbiamo trattato funzioni ≥ 0)

$\boxed{\alpha > 0}$

Vediamo se f è integrabile su $[1, \infty[$:

mi chiedo se esiste finito

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c |\sin(x^\alpha)|\,dx \qquad \text{sostituzione} \quad y = x^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad x = y^{\frac{1}{\alpha}} \qquad dx = \frac{1}{\alpha} y^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)} dy$$

$$= \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy = \frac{1}{\alpha} \frac{dy}{y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{c \to +\infty} \int_{1^\alpha}^{c^\alpha} |\sin(y)| \frac{1}{\alpha} \frac{dy}{y^{1-\frac{1}{\alpha}}} =$$

$$\frac{1}{\alpha} \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(y)|}{y^{1-1/\alpha}}\, dy \leftarrow$$ NON È DETTO CHE CONVERGA $1-\frac{1}{\alpha} < 1$

L'ESEMPIO NON FUNZIONA (sorry ..)

II° tentativo ...

$$\int_0^1 |\sin(x^\alpha)|\,dx \qquad \boxed{\alpha < 0}$$

stessa sostituzione $y = x^\alpha \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{\alpha}} \qquad dx = \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1} dy$

$\Rightarrow$ posso e

$$\frac{1}{\alpha}\int_{+\infty}^{1} |\sin(y)|\, y^{\frac{1}{\alpha}-1} = \frac{1}{|\alpha|}\int_{1}^{+\infty} \frac{|\sin(y)|}{y^{\underbrace{1+\frac{1}{|\alpha|}}_{\text{esponente}>1}}}\, dy$$

CONVERGE PERCHÉ

$$0 \leq \frac{|\sin(y)|}{y^{1+\frac{1}{|\alpha|}}} \leq \frac{1}{y^{1+\frac{1}{|\alpha|}}}$$

DUNQUE $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right) dx$ converge $\forall \beta>0$

ma $\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ NON ESISTE

ESERCIZIO

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(1+x)}$$

$\Rightarrow$ INT. IMPROPRIO perché $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}\,(1+x)} = +\infty$

fuori da zero l'integrando è (ben definito) e continuo

Dato che
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$$

cioè l'integrando $\simeq \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{x^{1/3}}$ $\left(\dfrac{1}{3} < 1 \;!!\right)$

Dato che $\frac{1}{3} < 1$ e dato che stiamo integrando vicino a zero

$\Longrightarrow g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ è integrabile (in s.i.) $\Longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}\,dx$ CONVERGE

POSSIAMO ANCHE CALCOLARE L'INTEGRALE !

Sostituzione $\sqrt[3]{x} = y \iff x = y^3 \quad dx = 3y^2\,dy$

$$\to \int_0^1 \frac{3y^2\,dy}{y(1+y^3)} = 3\int_0^1 \frac{y\,dy}{1+y^3}$$

(NON È PIÙ UN INT. IMPROPRIO)

NON HA RADICI REALI

$(1+y^3) = (1+y)(1-y+y^2)$ e quindi cerco

$$\frac{A}{y+1} + \frac{By+C}{y^2-y+1} = \frac{A(y^2-y+1)+B(y^2+y)+C(y+1)}{y^3+1}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B + C = 3 \\ A + C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = -A \\ B = -A \\ A = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \int_0^1 \left(\frac{y+1}{y^2-y+1} - \frac{1}{y+1} \right) dy =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{y^2-y+1} - \frac{1}{y+1} \right) dy =$$

$$\left[\ln \frac{\sqrt{y^2-y+1}}{|y+1|} \right]_0^1 + \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dy =$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(1) + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} \int_0^1 \frac{dy}{\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} =$$

$$-\ln(2) + 2\left[\arctan\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$-\ln(2) + \sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) =$$

$$2\sqrt{3}\,\underbrace{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{\frac{\pi}{6}} - \ln(2) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \ln(2)}$$