Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 28, 23 marzo 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

$$\int \frac{x^3+1}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}\,dx$$

$$Q(x) = (x^2-1)(x^2+2x+2) = (x-1)(x+1)(\underbrace{x^2+2x+2}_{(x+1)^2+1})$$

$$\frac{x^3+1}{(x^2-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} =$$

$$\frac{1}{\text{den.}}\Big(A(x+1)(x^2+2x+2) + B(x-1)(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x^2-1) \Big) =$$

$$\frac{1}{\text{den.}}\Big(A(x^3+2x^2+2x+x^2+2x+2) + B(x^3+2x^2+2x-x^2-2x-2)$$

$$+\, C(x^3-x) + D(x^2-1) \Big) =$$

$$\frac{1}{\text{den}}\Big(A(x^3+3x^2+4x+2) + B(x^3+x^2-2) + C(x^3-x) + D(x^2-1) \Big)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C = 1 \\ 3A+B+D = 0 \\ 4A-C = 0 \\ 2A-2B-D = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 4A \\ 5A+B = 1 \\ 3A+B+D = 0 \\ 2A-2B-D = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 4A \\ 5A+B = 1 \\ 5A-B = 1 \quad (\text{III}+\text{IV}) \\ 2A-2B-D = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5A + B = 1 \\ 5A - B = 1 \end{cases} \iff \begin{matrix} A = 1/5 \\ B = 0 \end{matrix} \quad \text{e poi} \quad \begin{matrix} C = 4/5 \\ D = -3/5 \end{matrix}$$

$$\frac{x^3+1}{(x^2-1)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{5}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{5}\frac{4x-3}{x^2+2x+2} \Rightarrow$$

* SI POTEVA NOTARE SUBITO CHE $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$

e quindi $x+1$ si semplifica

$$\int \frac{x^3+1}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}\,dx = \frac{1}{5}\ln|x-1| + \frac{1}{5}\int \frac{4x-3}{x^2+2x+2}\,dx = ⊗$$

$$\int \frac{4x-3}{x^2+2x+2}\,dx = 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - 7\int \frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$2\ln(x^2+2x+2) - 7\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$2\ln(x^2+2x+2) - 7\arctan(x+1) + c$$

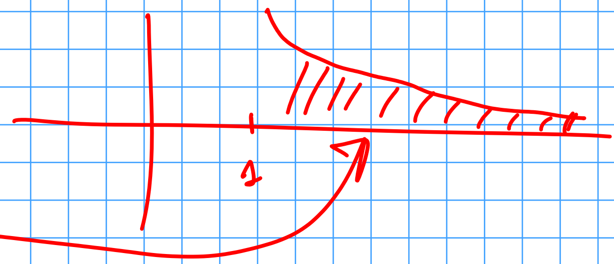
$$⊗ = \frac{1}{5}\ln|x-1| + \frac{2}{5}\ln(x^2+2x+2) - \frac{7}{5}\arctan(x+1) + c =$$

$$\underbrace{\frac{1}{5}\ln\left(|x-1|\,(x^2+2x+2)^2\right) - \frac{7}{5}\arctan(x+1)}_{F(x)} + c$$

NOTA CHE $F(x) \to +\infty$ se $x \to +\infty$,

QUESTO SIGNIFICA CHE

"L'AREA ILLIMITATA" è INFINITA



$$\left\{ \frac{x^3+1}{(x^2-1)(x^2+2x+1)^2} \right.$$

CASO GENERALE (INT. FUNZIONI RAZIONALI $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$)

$Q(x)$ NON HA TUTTE RADICI SEMPLICI

$$Q(x)=(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_h)^{m_h}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{M_1}\cdots\cdots(x^2+\alpha_k x+\beta_k)^{M_k}$$

dove $x_1 \dots x_h \in \mathbb{R}$, distinte

$x^2+\alpha_j x+\beta_j$ non ha radici reali

$m_1 \dots m_h$, $M_1 \cdots M_k$ MOLTEPLICITÀ

(le radici complesse compaiono a coppie coniugate CON LA STESSA MOLTEPLICITÀ)

ESEMPIO

$$\int \frac{x^2-1}{x\,(x^2+1)^2}\,dx \qquad Q(x) = x(x^2+1)^2 \qquad \text{RADICI } 0,\ \underbrace{i\ -i}_{\text{MOLTEPLICITÀ } 2}$$

I° MODO Cerco A, B, C, D, E IN MODO CHE:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}\Big(A(x^4+2x^2+1) + (Bx+C)\,x\,(x^2+1) + (Dx+E)x\Big) =$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}\Big(A(x^4+2x^2+1) + B(x^4+x^2) + C(x^3+x) + Dx^2 + Ex\Big) =$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ 2A + B + D = 1 \\ C + E = 0 \\ A = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -1 \\ C = 0 \\ E = 0 \\ B = 1 \\ D = 2 \end{cases}$$

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$y = x^2 \qquad 2x\,dx = dy$

$$\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} + \int \frac{dy}{(y+1)^2} =$$

$$\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} - \frac{1}{x^2+1} + c$$

(NOTA CHE $\to 0$ per $x \to \infty$)
$\sim$ AREA FINITA ALL'INFINITO

II° MODO (DI SCOMPORRE) CERCO A B C D E tali che

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{Dx+E}{x^2+1} =$$

(A B C D E NON VENGONO GLI STESSI DEL MODO I!

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{D(x^2+1)-(Dx+E)2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{-Dx^2-2Ex+D}{(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{A(x^4+2x^2+1)+B(x^4+x^2)+C(x^3+x)-Dx^3-2Ex^2+Dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-D=0 \\ 2A+B-2E=1 \\ C+D=0 \\ A=-1 \end{cases}$$

$A=-1$

$C=D=0$

$B=1$

$E=-1$

DUNQUE

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1}$$ ← TORNA COME PRIMA.

ALTRO ESEMPIO

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^3}\,dx$$

1° MODO $\frac{1}{x}\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^3}$

.....

II° MODO

$$\frac{1}{x}\,\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\,\frac{\overset{\text{GRADO }3}{Dx^3+Ex^2+Fx+G}}{\underset{\text{GRADO }4}{(x^2+1)^2}} =$$

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{(3Dx^2+2Ex+F)(x^2+1)^{\cancel{2}} - (Dx^3+Ex^2+Fx+G)\,2\cancel{(x^2+1)}\,2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}}}$$

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{D\big(\overset{-x^4}{3x^4+3x^2-4x^4}\big) + E\big(\overset{-2x^3}{2x^3+2x-4x^3}\big) + F\big(\overset{-3x^2}{x^2+1-4x^2}\big) - 4Gx}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{1}{x(x^2+1)^3}\cdot\Big(A(x^6+3x^4+3x^2+1) + Bx^2\underset{x^6+2x^4+x^2}{(x^4+2x^2+1)} +$$

$$Cx\underset{x^5+2x^3+x}{(x^4+2x^2+1)} + Dx\underset{-x^5+3x^3}{(-x^4+3x^2)} + Ex\underset{-2x^4+2x^2}{(-2x^3+2x)} + Fx\underset{-3x^3+x}{(-3x^2+1)} - 4Gx^2\Big)$$

$A + B = 0$

$C - D = 0$

$3A + 2B - 2E = 0$

$2C + 3D - 3F = 0$

$3A + B + 2E - 4G = 0$

$C + F = 0$

$A = 1$

$A = 1 \qquad B = -1 \qquad E = 1/2$

$C = D \qquad G = 3/4$

DUNQUE

(A MENO DI ERRORI...)

$$\begin{cases} 5C - 3F = 0 \\ C + F = 0 \end{cases} \iff \begin{array}{l} C = 0 \\ F = 0 \\ D = 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}}{(x^2+1)^2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^3} = \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{4} \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{1}{x^3(x+1)} dx$$

I°

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}$$

II°

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{d}{dx} \frac{cx+D}{x^2}$$

PRIMO GRADO

SECONDO GRADO

1°

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3}{x^3(x+1)} =$$

$$\frac{A(x^3+x^2) + B(x^2+x) + C(x+1) + Dx^3}{x^3(x+1)}$$

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ A + B = 0 \\ B + C = 0 \\ C = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} D &= -1 \\ A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \alpha \neq -1}$$

x^{-2} $\quad$ x^{-3}

$\Rightarrow$ VIENE $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$

$$\ln\frac{|x|}{|x+1|} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c$$

CONTROLLARE CHE COL METODO II VIENE LA STESSA COSA

REGOLA GENERALE

SE

$$Q(x) = (x-x_1)^{m_1} \cdots (x-x_h)^{m_h} (x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{n_1} \cdots (x^2+\alpha_k x+\beta_k)^{n_k}$$

ALLORA

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \quad (\text{MODO I})$$

$$\frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots \frac{A_{1,m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} +$$

.... stesso discorso per $x_2, \ldots x_h$ +

$$\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1n_1}x+C_{1,n_1}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{n_1}} +$$

... termini analoghi per gli altri trinomi

OPPURE (MODO II)

$$= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_h}{x-x_h} +$$

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \quad + \frac{B_k x + C_k}{x^2+\alpha_k x+\beta_k}$$

$$+ \frac{d}{dx} \frac{P_1(x)}{(x-x_1)^{m_1-1} \cdots (x-x_h)^{m_h-1} (x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{m_1-1} \cdots (x^2+\alpha_k x+\beta_k)^{m_k-1}}$$

dove $P_1(x)$ è un polinomio di grado < denominatore

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = ??$$

se uso il Metodo II° posso scrivere:

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B(x^2+1) - 2x(Bx+C)}{(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{A}{x^2+1} + \frac{-Bx^2-2Cx+B}{(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)-Bx^2-2Cx+B}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ C = 0 \\ A + B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 1/2 \\ C = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \text{cost}$$

SI PUÒ ANCHE FARE DIRETTAMENTE (TRUCCO..)

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x}{2}\underbrace{\frac{(-2x)}{(x^2+1)^2}}_{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}\,dx =$$

(Per PARTI)

$$\arctan(x) + \frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \text{cost.} \qquad (\text{COME PRIMA!!})$$

SI PUÒ ANCHE FARE (con k INTERO)

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^k}\,dx + \int \frac{-x^2}{(x^2+1)^k}\,dx =$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{k-1}} + \int \frac{x}{2}\frac{-2x}{(x^2+1)^k}\,dx =$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{k-1}} + \frac{x}{2(k-1)}\frac{1}{(x^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{k-1}} =$$

$$\frac{1}{2(k-1)}\frac{x}{(x^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-1}{2k-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{k-1}}$$

<u>FORMULA RICORSIVA:</u> Se $I_k(x) := \int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,dx$ HO TROVATO

$$I_k(x) = \frac{1}{2k-2}\frac{x}{(x^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-1}{2k-2}\, I_{k-1}$$

Per es. (RIFACCIO I CALCOLI)

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^3} + \int -\frac{x}{2}\frac{2x}{(x^2+1)^3}\,dx =$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{4}\frac{1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{4(x^2+1)^2}$$

FATTO PRIMA

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}(x^2+1)^{-2} = -2(x^2+1)^{-3}2x = \frac{-4x}{(x^2+1)^3}\right)$$

$$= \frac{3}{8}\arctan(x) + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \text{cost.}$$

Si poteva anche fare:

$$\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^2+1)^2} \quad \ldots$$

INTEGRALI IMPROPRI (Aree di Regioni ILLIMITATE)

DUE POSSIBILITÀ

$\int_a^b f(x)\,dx$ f NON LIMITATA VICINO AD a (O VICINO A b) (ALTEZZA ∞)

$\int_a^{+\infty} f(x)$ / $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ (BASE ∞)

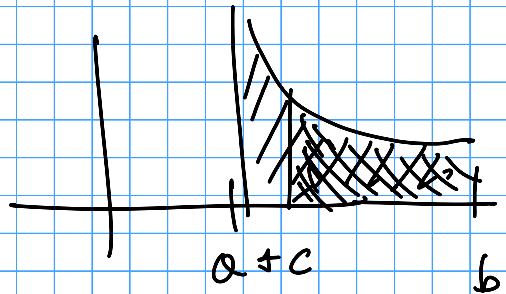
I° CASO

Def. Sia $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ tale che f sia integrabile secondo Riemann su ogni sottointervallo $[c,b]$ con $c>a$ (DUNQUE LIMITATA SU OGNI $[c,b]$ per $c>a$)

Se esiste finito $\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$

si dice che f È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO SU $]a,b]$ (o anche che $\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente), e si indica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$



NOTA CHE SE f è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$ facendo il limite sopra ritrovo l'int. di Riemann (CONSEGUENZA DEL T. FOND. CALC. INT. II)

CONVENIAMO CHE se $\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx = +\infty / -\infty$

scriviamo comunque $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty / -\infty$

OSSERVAZIONE (IMPORTANTE)

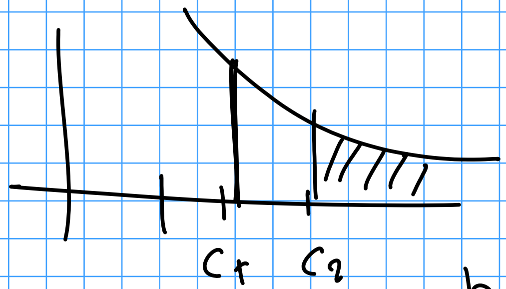
Se $f \geq 0$ ($f \leq 0$) e f è integrabile su ogni $[c,b]$, $c>0$

sicuramente ESISTE $\int_0^b f(x)\,dx$ eventualmente ∞. INFATTI

LA FUNZIONE

$$F(c) = \int_c^b f(x)\,dx$$ è decrescente rispetto a c

(al crescere di c l'integrale diminuisce)



$c_2 > c_1 \Rightarrow$

$$\int_{c_1}^b f(x)\,dx \geq \int_{c_2}^b f(x)\,dx \iff \underbrace{\int_{c_1}^b f(x)\,dx - \int_{c_2}^b f(x)\,dx}_{\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx} \geq 0$$

DUNQUE SE $f \geq 0$ (e f int. su ogni $[c,b]$ $\forall c > a$)

HA SENSO SCRIVERE

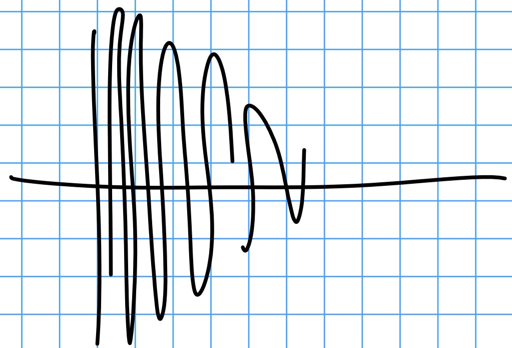
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

IN QUESTO CASO $(f \geq 0)$ posso dire

f INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO SU $]a,b]$ $\iff \int_a^b f(x)\,dx < +\infty$ $(\neq \infty)$

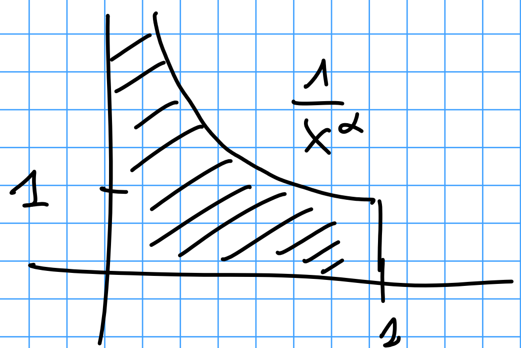
VICEVERSA SE f è "a segno variabile"

LA SCRITTURA $\int_0^b f(x)\,dx$ PUÒ ESSERE PRIVA DI SENSO



ESEMPIO (IMPORTANTE - DA SAPERE) $\alpha > 0$

$f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ su $]0,1]$ $\left( ]0,b] \text{ per } b>0 \right)$



A FINITA O INFINITA ??

APPLICO LA DEFINIZIONE

per $c > 0$ considero

$$\int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_c^1 x^{-\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_c^1 = \frac{1-c^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$(\alpha \neq -1)$

Faccio tendere $c \to 0^+$ trovo

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \frac{1-c^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } 1-\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha<1 \\ +\infty & \text{se } 1-\alpha<0 \Leftrightarrow \alpha>1 \end{cases}$$

$\alpha \geq 1$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile vicino a zero / $\frac{1}{x^2}$ NON è INT. VICINO A ZERO

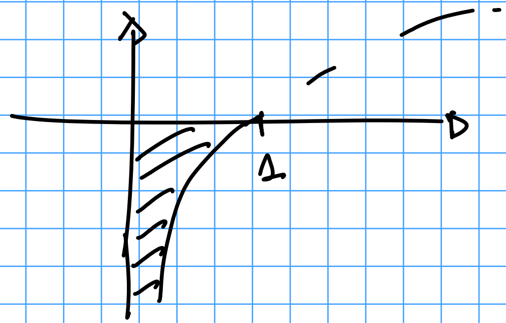
ANCHE $\frac{1}{x}$ NON È INT.

Se $\alpha = 1$?? Stessi calcoli

$$\int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_c^1 = -\ln c \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = -\lim_{c\to 0^+} \ln(c) = +\infty$$

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx$$



$$\int_c^1 \ln(x)\,dx = (\text{per parti}) = \Big[x\ln(x)\Big]_c^1 - \int_c^1 x\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

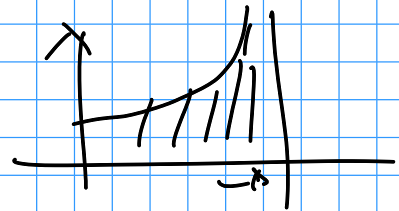
$$-c\ln(c) - 1 + c$$

Se faccio il limite per $c \to 0$ TROVO $\boxed{-1}$ perché

$$\lim_{c\to 0} c\ln(c) = 0$$

ANALOGA DEF. se f è Riemann int. su $[a,c]$ per ogni $c < b$ e si fa allora il

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$



DEF. Se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\left( ]-\infty, a] \dots \right)$,

integrabile secondo Riemann su ogni $[a, c]$ con $c < +\infty$

DICO CHE f è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty[$ se esiste finito $\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx$

che indico con $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (Dico anche che l'int. improprio È CONVERGENTE)

PER LE FUNZIONI $f \geq 0$ (o $f \leq 0$) posso sempre scrivere

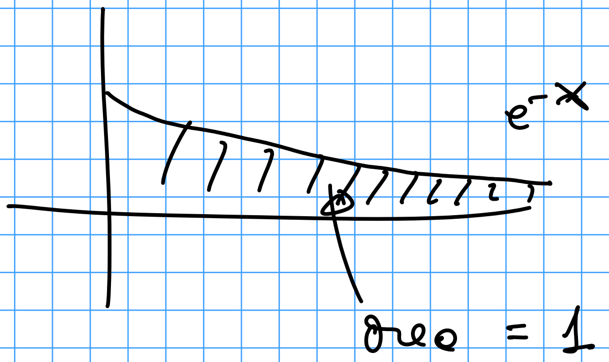
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{eventualmente } +\infty$$

e la convergenza equivale a $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$

ESEMPIO $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx$ con $a > 0$ TROVO

$$\int_0^c e^{-ax}\,dx = \left[\frac{e^{-ax}}{a} \right]_0^c = \frac{e^{-ac} - 1}{-a} \Longrightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{1-e^{-ac}}{a} = \frac{1}{a}$$



ESEMPIO (IMPORTANTE)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^c =$$

$$\frac{1}{\alpha-1} + \lim_{c\to+\infty}\frac{c^{-\alpha+1}}{1-\alpha} = \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha>1\\ +\infty & \text{se } \alpha<1\end{cases}$$

se $\alpha = 1$ trovo il $\ln(x)$ come primitiva $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{1}{x} = +\infty$

[si SCAMBIANO I COMPORTAMENTI RISPETTO A $]0,1]$]

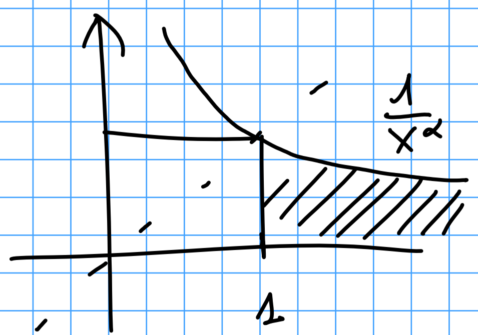
IN EFFETTI SE FACCIO IL CAMBIO DI VARIABILE

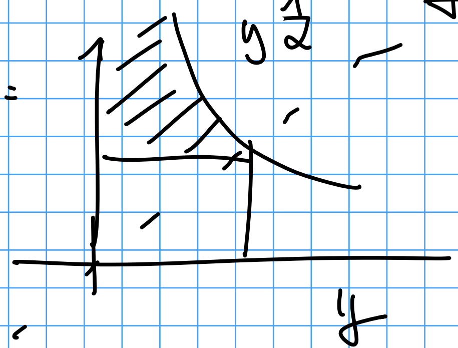
$y = \frac{1}{x}$ TROVO $x = \frac{1}{y}$ $dx = -\frac{1}{y^2}\, dy$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^{\frac{1}{c}} y^\alpha \frac{dy}{-y^2} =$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \int_{\frac{1}{c}}^1 \frac{dy}{y^{2-\alpha}} = \lim_{d \to 0} \int_d^1 \frac{dy}{y^{2-\alpha}} = \int_0^1 \frac{dy}{y^{2-\alpha}}$$

FINITO $\Leftrightarrow$ $2-\alpha < 1$ $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$





$\leftarrow$ INTEGRABILE SE $\frac{1}{\alpha} < 1$ $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

$y = \frac{1}{x^\alpha}$ $\Leftrightarrow$ $x =$

ANALOGAMENTE POSSO GENERALIZZARE:

$$\int_{x_0}^{x_0+1} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} \quad \text{è finito} \iff \alpha < 1$$

$$\int_{x_0-1}^{x_0} \frac{dx}{|x-x_0|^\alpha} \quad \text{" " " "}$$

IL PROBLEMA CHE NASCE:

POSSO DISTINGUERE CONVERGENZA / NON CONV.

SENZA CALCOLARE ESPLICITAMENTE LA PRIMITIVA (senza trovare il valore dell'int. improprio) !

TEOREMI DI CONFRONTO