Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 27, 22 marzo 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

CALCOLO DI INTEGRALI

$$(*) = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+8}} = ??$$

(ABBIAMO VISTO $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ $\qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$)

GUARDIAMO LE RADICI DI $4x^2+8x+8$

$$\Delta = 64 - 128 < 0$$

NO RADICI REALI!

qui c'è "+" dato che non ci sono radici reali

$$4x^2+8x+8 = (2x+2)^2 \overset{*}{+} 4$$

DUNQUE

$$(*) = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+2)^2+4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{(2x+2)^2}{4}+1}} =$$

* Metto in evidenza

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

se $y = x+1 \qquad dy = dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{2}\,\text{arcsinh}(y) + \text{cost} = \frac{1}{2}\,\text{arcsinh}(x+1) + \text{cost}$$

$\int \sqrt{x^2 - 5x + 6}\, dx$ come primo cerco di

scrivere $x^2 - 5x + 6 = (x + \alpha)^2 + \beta$. DUNQUE

$$x^2 - 5x + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 =$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

(quindi le radici sono $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$)

TORNIAMO ALL' INTEGRALE

$$\int \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}\, dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{(2x-5)^2 - 1}\, dx$$

$y = 2x - 5 \qquad dx = \frac{1}{2} dy \qquad \Rightarrow$

$$\frac{1}{4} \int \sqrt{y^2 - 1}\, dy = \frac{1}{4} \int \frac{y^2 - 1}{\sqrt{y^2-1}}\, dy = (\ast\ast)$$

$$\int y \underbrace{\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}}_{\frac{d}{dy}\sqrt{y^2-1}}\, dy - \operatorname{arccosh}(y) =$$

$$y\sqrt{y^2-1} - \int \sqrt{y^2-1}\,dy - \operatorname{arccosh}(y) \Rightarrow$$

$$\int \sqrt{y^2-1}\,dy = \frac{y\sqrt{y^2-1}}{2} - \frac{\operatorname{arccosh}(y)}{2} \Rightarrow$$

$$(\cancel{*}\,*) = \frac{1}{8}\left[(2x-5)\sqrt{x^2-5x+6} - \operatorname{arccosh}(2x-5)\right] + c$$

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI "RAZIONALI", cioè

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ dove P, Q polinomi

I) se grado $P \geq$ grado di Q posso <u>dividere</u>

P per Q e scrivere

$$P(x) = P_1(x)\,Q(x) + R(x)$$

dove P_1, R sono polinomi e grado $(R) <$ grado(Q)

$$\Rightarrow \quad f(x) = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

la "integrale" $\uparrow$ funzione razionale PROPRIA

(grado(NUMERATORE) < grado(DEN.))

D'ORA IN POI SUPPONGO n = grado (P)

m = grado (Q) $\boxed{n < m}$

II (caso più semplice) Q ha m radici reali distinte $x_1 \; x_2 \; .. \; x_m$

per esempio $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$

$P(x) = x^2+1$

$Q(x) = x^3-x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$

tre radici distinte : $0, 1, -1$

"RIDUZIONE IN FRATTI SEMPLICI" : trovo A, B, C t.c.

$$\frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x^2-1)+B(x^2-x)+C(x^2+x)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2(A+B+C) + x(-B+C) - A}{X(X+1)(X-1)}$$

IMPONGO CHE $\begin{cases} A+B+C = 1 \\ -B+C = 0 \\ -A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -1 \\ B+C = 2 \\ -B+C = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases} \Rightarrow$ INTEGRALE $= \int \left(-\frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-1} \right) dX$

$= -\ln|X| + \ln|X+1| + \ln|X-1| + \text{cost} =$

$\ln\left|\frac{X^2-1}{X}\right| + \text{cost}$

(a rigore c'è una costante diversa in ognuno degli intervalli $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$, $]1,+\infty[$)

Nel caso generale $f(x) = \frac{P(x)}{(X-X_1)\cdots(X-X_m)} \Rightarrow$ Trovo

m costanti $A_1 \cdots A_m$ tali che

$$f(x) = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_m}{x-x_m}$$ e

ognuno di questi addendi ha come primitiva

$$A_i \ln|x-x_i| \qquad i = 1 \dots m$$

III Q ha tutte radici semplici, ma alcune sono complesse. Allora:

$$Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_h)\cdot (x-z_1)\cdots(x-z_k)$$

$$x_1 \dots x_h \in \mathbb{R} \qquad z_1 \dots z_k \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$$

<u>NOTIAMO PERÒ CHE</u> se z è una radice di Q, cioè se $Q(z)=0$, anche $\bar{z}$ è radice di Q, perché

$$Q(z)=0 \Rightarrow \overline{Q(z)}=0$$
$$\overline{Q(z)} = Q(\bar{z})$$ (perché Q è a coeff. reali)

DUNQUE le radici non reali compaiono a coppie coniugate, quindi posso scrivere (meglio)

$$Q(x) := (x-x_1)\cdots(x-x_h)(x-(\underbrace{a_1+ib_1}_{z_1}))\cdots(x-(a_k+ib_k))$$
$$\cdot(x-(a_1-ib_1))\cdots(x-(a_k-ib_k))$$

$x_1 \cdots x_h$ le radici reali

$a_1 \pm i b_1, \ldots, a_k \pm i b_k$ le radici non reali (TUTTE DIVERSE TRA LORO)

$(\Rightarrow m = h + 2k)$

OGNI COPPIA $(x-(a_j+ib_j))$ $(x-(a_j-ib_j))$ DÀ LUOGO A

$$[(x-a_j)+ib_j][(x-a_j)-ib_j] =$$
$$(x-a_j)^2 + b_j^2$$ TRINOMIO DI II° grado senza radici reali

ESEMPI

$$\int \frac{x^2-1}{x^3+x}\,dx$$

$Q(x) = x(x^2+1) \left(= x(x-i)(x+i) \right)$

CERCO TRE COSTANTI A B C tali che

$$\frac{x^2-1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

(potrei anche fare $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+i} \ldots$)

$$\frac{A(x^2+1) + x(Bx+C)}{x(x^2+1)} = \frac{x^2(A+B) + Cx + A}{x^3+x}$$

IMPONGO
$$\begin{cases} A+B = 1 \\ C = 0 \\ A = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \\ C = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

INTEGRALE $= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx =$

$-\ln|x| + \int \frac{dy}{y+1} = \quad (y = x^2)$

$-\ln|x| + \ln(x^2+1) + c = \ln\left|\frac{x^2+1}{x}\right| + c$

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$$

$Q(x) = x^4 + 1$ NON HA RADICI REALI

Per quanto visto devo poter scrivere :

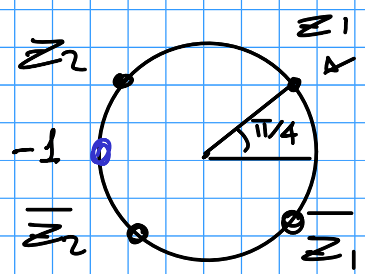
$Q(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ ← !!

(oppure $Q(x) = (x^2 + ax + b)^2$ ← si vede che no ..)

per trovare a, b, c, d posso svolgere i calcoli e imporre le condizioni su a, b, c, d in modo da valere la relazione sopra OPPURE

Posso trovare le radici complesse di $Q(x)$

$x^4 + 1 = 0 \iff x^4 = -1$ RADICI IV^e di -1



$z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$$-1 = e^{\pi i} \Rightarrow \text{RADICI } \overline{IV}^{e} = e^{\frac{\pi}{4}i + k\frac{\pi}{2}} =$$
$k = 0, 1, 2, 3$

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

(+ le coniugate)

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$\Rightarrow x^4 + 1 = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)(x - z_2)(x - \bar{z}_2) =$$

$$\Big(x^2 - \underbrace{(z_1 + \bar{z}_1)}_{2\operatorname{Re} z_1} x + \underbrace{z_1 \bar{z}_1}_{|z_1|^2}\Big)\Big(x^2 - \underbrace{(z_2 + \bar{z}_2)}_{2\operatorname{Re} z_2} x + \underbrace{z_2 \bar{z}_2}_{|z_2|^2}\Big) =$$

$$(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

ALLORA POSSO TROVARE A, B, C, D tali che

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1},$$ svolgo ..

$$= \left\{ A\left(x^3+\sqrt{2}x^2+x\right)+B\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+C\left(x^3-\sqrt{2}x^2+x\right) + D\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\right\} \Big/ x^4+1$$

(deve fare $1/x^4+1$)

$\Rightarrow$ TROVO LE CONDIZIONI SEGUENTI

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D = 0 \\ A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D = 0 \\ B + D = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = -A \\ D = 1 - B \\ \sqrt{2}A + \cancel{B} + \sqrt{2}A + 1 - \cancel{B} = 0 \\ \cancel{A} + \sqrt{2}B - \cancel{A} - \sqrt{2} + \sqrt{2}B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -A \\ D = 1 - B \\ A = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ B = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad C = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad B = \frac{1}{2} \quad D = \frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ INTEGRALE $=$ $\frac{1}{4}\left\{\int\left(\frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)dx\right\}$

PRENDIAMO IL PRIMO PEZZO

$$\int \frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx = $$ SOMMA DI DUE PEZZI ① + ② in modo da

(NON C'È PIÙ x

$$① = K_1 \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}{x^2-\sqrt{2}x+1} + K_2 \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$= \int\left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2x-\sqrt{2}\right)}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}+2}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx =$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{(2x-\sqrt{2})}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \int \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} =$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} =$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + 2\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1} =$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)+c$$

ANALOGAMENTE SI TROVA IL SECONDO INTEGR.

IN GENERALE SE $Q(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_h)$
$(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)\cdots(x^2+\alpha_k x+\beta_k)$

dove $x^2+\alpha_i x+\beta_i$ NON HA RADICI REALI
(e tutti i fattori sono diversi tra loro) SCRIVO

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\dots+\frac{A_h}{x-x_h}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+\alpha_1x+\beta_1}+\dots+\frac{B_kx+C_k}{x^2+\alpha_kx+\beta_k}$$

MI RICONDUCO A CALCOLARE

① $\displaystyle\int\frac{dx}{x-x_j}=\ln(x-x_j)$

② $\displaystyle\int\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx$ (dove $x^2+\alpha x+\beta=0$ NON HA SOLUZIONI REALI)

$\Downarrow$

LO SCRIVO (per opportune D ed E)

$$D\int \frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx + E\int \frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx$$

$\Downarrow$

$$D\ln\left(x^2+\alpha x+\beta\right)$$

L'ultimo pezzo $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx$ si scrive

$$\int \frac{1}{\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\underbrace{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}_{\text{è POSITIVO}}} = \int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} =$$

$$\frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1} = \frac{b}{b^2}\,\mathrm{atan}\left(\frac{x-a}{b}\right) + \mathrm{cost}.$$

ALTRO ESEMPIO

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx = (*)$$

NOTO CHE $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ (NO RADICI REALI)

$$\Rightarrow (*) = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$\ln\sqrt{x^2+2x+2} + \arctan(x+1) + \text{cost.}$$

$$\int \frac{x}{x^4-1}\,dx$$

$$Q(x) = x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$\frac{A(x^3+x^2+x+1) + B(x^3-x^2+x-1) + C(x^3-x) + D(x^2-1)}{x^4-1} =$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 0 \\ A + B - C = 1 \\ A - B - D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{I} + \mathrm{III} &\to 2A + 2B = 1 \\ \mathrm{I} - \mathrm{III} &\to 2C = -1 \\ \mathrm{II} + \mathrm{IV} &\to 2A - 2B = 0 \\ \mathrm{II} - \mathrm{IV} &\to 2D = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} C &= -1/2 \\ D &= 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} A + B = 1/2 \\ A - B = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{4} \quad B = \frac{1}{4} \quad C = -\frac{1}{2} \quad D = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{x}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{4}\left\{\int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \ln|x-1| + \ln|x+1| - \ln(x^2+1) + \text{cost.}\right\} =$$

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + \text{cost.}$$