Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 26, 16 marzo 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE :

$$\boxed{\int_a^b f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx}$$

(si vuole - guardando la dimostrazione - che esista una primitiva di f e $(f \circ g)\, g'$ e f siano integrabili)

IN TERMINI DI INTEGRALI INDEFINITI (di primitive) POTREI SCRIVERE :

$$" \int f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \quad \text{dove} \quad x = g(t) "$$

CIOE' : Le primitive di $(f \circ g)\, g'$ sono le primitive di f composte con g

Quando si usa la formula si può ragionare dicendo che quando calcolo $\int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt$ posso "SOSTITUIRE"

$g(t)$ con x e "$g'(t)\,dt$ con dx"

"$x = g(t)$" $\Rightarrow$ "$dx = g'(t)\,dt$"

NELL' ESEMPIO VISTO IERI

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

PONGO $x = \sin(t)$ $\Rightarrow$

(formalmente ...) $dx = \cos(t)\,dt$

e $1 = \sin(\pi/2)$ $0 = \sin(0)$ da cui

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}\,\cos(t)\,dt = \text{- - -} \text{ (COME IERI) } = \frac{\pi}{4}$$

A VOLTE LA FORMULA SI USA "NELL' ALTRO SENSO", per es.

$$\int_0^2 x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2x\, e^{x^2}\,dx$$

$x^2 = y$

"$2x\,dx = dy$" $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\int_0^4 e^y\,dy = \frac{1}{2}\left[\,e^y\,\right]_0^4 = \frac{e^4-1}{2}$$

VARIANTE: $\int x\,e^{x^2}\,dx$ pongo $y = x^2 \Rightarrow$

$x = \sqrt{y}$ $\quad dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy$

$\Rightarrow$ posso a $\int \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}\,e^y\,dy = \frac{1}{2}\int e^y\,dy = \frac{e^y}{2} + \text{cost}$

DUNQUE $\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + \text{cost}$

$$\Rightarrow \int_0^2 x\,e^{x^2}\,dx = \left[\,\frac{1}{2}e^{x^2}\,\right]_0^2 = \frac{e^4-1}{2}$$

NOTIAMO CHE GUARDANDO LA DIM. VIENE DA CHIEDERSI

QUANDO f AMMETTE PRIMITIVA F

PROBLEMA: IN QUALI IPOTESI su f ESISTE UNA PRIMITIVA (per f)

Per esempio $f(x) = e^{-x^2}$ AMMETTE UNA PRIMITIVA ??

SE CERCO TRA LE "funzioni elementari" NON TROVO NESSUNA FUNZIONE F tale che $F'(x) = e^{-x^2}$

TEOREMA (II° VERSIONE DEL TEOR. FOND. DEL C.I)

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua $\Rightarrow$ F ammette primitive.

ANZI vale quanto segue: POSTO

$$G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

LA VARIABILE x "SPOSTA" l'intervallo di integrazione

(1) Se so solo che f è integrabile $\Rightarrow$ G è lipschitziana

(2) Se f è continua $\Rightarrow$ G è derivabile e $G'(x) = f(x)$ $\forall x$

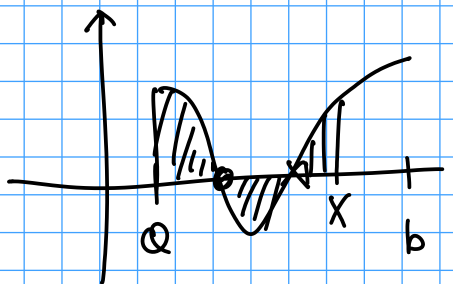
(VISTO)

IDEA ALLA BASE DEL TEOR.

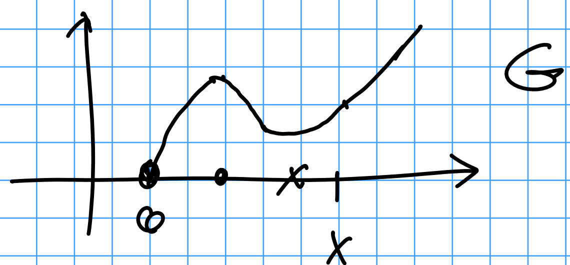
Se esiste F tale che $F' = f$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \Rightarrow$$

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$$



$\Rightarrow$



DIM. Abbiamo $$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

(1) Siano x_1 e x_2 tra a e b $\Rightarrow$

$$G(x_2) - G(x_1) = \int_a^{x_2} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt =$$

$$\cancel{\int_a^{x_1} f(t)\,dt} + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt - \cancel{\int_0^{x_1} f(t)\,dt} = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$

NE SEGUE $$|G(x_2) - G(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt$$

(suppongo $x_1 < x_2$) $$\leq \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sup_{a\leq t\leq b} |f(t)|}_{M}\,dt =$$

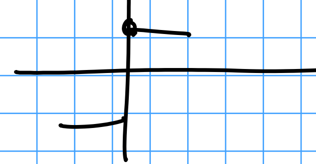
$$M(x_2 - x_1) = M|x_2 - x_1|$$

(si vede che se $x_2 < x_1$ il caso è vero lo stesso)

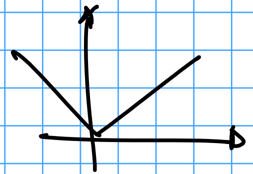
DUNQUE

$$|G(x_2) - G(x_1)| \leq M|x_2 - x_1| \qquad (G \text{ è Lip.})$$

dove $$M = \sup_{a\leq t\leq b} |f(t)|$$

(per es $f(x)=\begin{cases} 1 & x\geq 0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ 

$$G(x)=\int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_0^x 1\,dt = x & \text{se } x>0 \\ \int_0^x (-1)\,dt = [-t]_0^x = -x & \text{se } x<0 \end{cases}$$



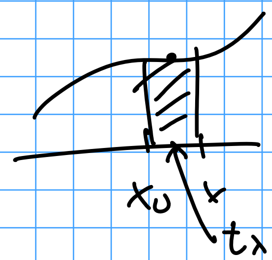
)

(2) (ORA f VIENE SUPPOSTA CONTINUA). Sia $x_0 \in [a,b]$

e consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) = \text{(come prima)}$$

$$\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt \leftarrow$$ MEDIA INTEGRALE DI f TRA x e x_0



$=$ (teorema della media int. NOTA: f è continua) $= f(t_x)$

$$\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} = f(t_x) \quad \text{per } x_0 < t_x < x \quad (\text{suppongo } x > x_0 \ldots)$$

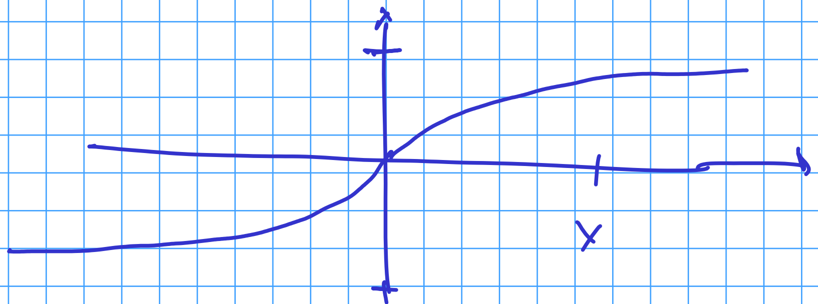
Faccio il limite per $x \to x_0$:

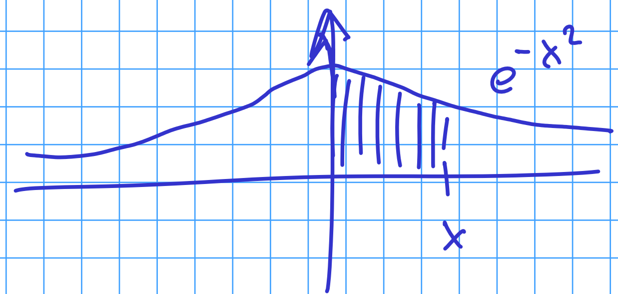
$$\lim_{x\to x_0} \frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(t_x) \underset{\substack{\text{(cambio di}\\\text{variabile)}}}{=} \lim_{y\to x_0} f(y) \underset{f \text{ continua}}{=} f(x_0)$$

CIOÈ G è derivabile in x_0 e $G'(x_0) = f(x_0)$ #

· DUNQUE il teor. di sostituzione vale se f è continua g, g' continue.

· La funzione $E(x) := \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ è una primitiva di $f(x) = e^{-x^2}$





NOTA CHE $\lim_{x\to+\infty} E(x)$ esiste finito (LO VEDREMO), cioè "l'area" di tutta la regione illimitata sotto il grafico di e^{-x^2} è finita

INTEGRAZIONE PER PARTI.

Prendiamo f e $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ e supponiamo che ammettono primitive F e G.

Per le formule sulle derivate:

$$(F \cdot G)' = F' \cdot G + F G' = f G + F g$$

DUNQUE $F \cdot G$ è primitiva di $fG + Fg$

$$\rightsquigarrow \quad F(x) \, G(x) = \int f(x) G(x) \, dx + \int F(x) g(x) \, dx$$

oppure

$$\underbrace{\int f(x) \, G(x) \, dx = F(x) \, G(x) - \int F(x) g(x) \, dx}_{\text{FORMULA DI INTEGR. PER PARTI CON GLI INT. INDEF.}}$$

IN TERMINI DI INTEGRALI:

$$\int_a^b f(x) \, G(x) \, dx = \Big[F(x) \, G(x) \Big]_a^b - \int_a^b F(x) g(x) \, dx$$

ESEMPI DI INTEGRALI "PER PARTI"

$$\int \ln(x)\, dx \qquad (e \text{ dosto di zero})$$

$$\int \underset{f(x)}{1} \cdot \underset{G(x)}{\ln(x)}\, dx \qquad \left(\Rightarrow \quad F(x) = x \qquad g(x) = \frac{1}{x} \right)$$

$$= x \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - x + \text{cost.} = x(\ln(x) - 1) + \text{cost}$$

NELLO STESSO MODO se $\boxed{K \neq -1}$

$$\int x^K \ln(x)\, dx = \frac{x^{K+1}}{K+1} \ln(x) - \int \frac{x^{K+1}}{K+1} \frac{1}{x}\, dx =$$

$$\frac{x^{K+1}}{K+1} \ln(x) - \frac{x^{K+1}}{(K+1)^2} + \text{cost}$$

$$\int \arctan(x)\, dx = \int \underset{f(x)}{1} \cdot \underset{G(x)}{\arctan(x)}\, dx =$$

$$x\arctan(x) - \int x \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{\Uparrow}{=} x\arctan(x) - \ln\sqrt{1+x^2} + cost$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} \quad \left(\underline{se\ y = 1+x^2} \quad 2x\,dx = dy\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln(|y|) + c = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c = \ln\sqrt{1+x^2} + c$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$ (METODO ALTERNATIVO A QUELLO GIÀ VISTO)

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int_0^1 \underset{G}{x}\ \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}_{f(x)}\,dx =$$

$$\left[\arcsin(x)\right]_0^1 - \left(\underbrace{\left[x\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 -\sqrt{1-x^2}\,dx\right)$$

$$F(x) = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

DUNQUE $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

$$2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} \iff \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

$\int x^2 e^{2x}\,dx$ (IN GENERALE $\int P(x)\, e^{ax}\,dx$ dove $P(x)$ è un polinomio)

[USARE L'INTEGRAZIONE PER PARTI (PIÙ VOLTE)

USANDO $f(x) = e^{ax}$ $\left(F(x) = \frac{e^{ax}}{a} \right)$ e

$G(x) = P(x) \Rightarrow G'(x) = g(x) = P'(x)$ SCENDE DI GRADO]

$$\int \underset{G(x)}{x^2}\, \underset{f(x)}{e^{2x}}\,dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int \underbrace{2x}_{g(x)}\, \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{F(x)}\,dx =$$

$$\frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x}\,dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - x\frac{e^{2x}}{2} + \int 1\cdot \frac{e^{2x}}{2}\,dx =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) e^{2x} + \frac{e^{2x}}{4} + c = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + \text{costante}$$

DUNQUE $\quad \int P(x)\, e^{ax}\,dx = Q(x)\, e^{ax} + \text{cost}$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$

VARIANTE PER CALCOLARE

$\int x^2 e^{2x}\,dx \qquad$ CERCO $Q(x) = ax^2 + bx + c$ in modo che

$$\frac{d}{dx}\, Q(x)\, e^{2x} = x^2 e^{2x} \qquad \text{cioè}$$

$$\frac{d}{dx}\left(ax^2 + bx + c\right) e^{2x} = (2ax + b)\, e^{2x} + (ax^2 + bx + c)\, 2e^{2x} =$$

$$\left(2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b\right) e^{2x} \underset{(\text{VOGLIO})}{=} x^2 e^{2x}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ 2c + b = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{matrix} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 1/4 \end{matrix} \qquad \text{da cui}$$

$$\int x^2 e^{2x}\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{x} + \text{cost.}$$

$$\int P(x)\sin(ax)\,dx \quad / \int P(x)\cos(ax)\,dx \qquad P \text{ polinomio}$$

Per esempio

$$\int x^2 \sin(x)\,dx = x^2(-\cos(x)) - \int 2x(-\cos(x))\,dx =$$

$$-x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\,dx =$$

$$-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - 2\int \sin(x)\,dx =$$

$$-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + \text{costante}$$

IN GENERALE POSSO SCRIVERE

$$\int \left(P_1(x)\sin(ax) + P_2(x)\cos(ax)\right)dx = Q_1(x)\sin(ax) + Q_2(x)\cos(ax) + c$$

dove P_1 P_2 polinomi di grado $\leq n$ $\Rightarrow$ Q_1, Q_2 pol di grado $\leq n$

TUTTO QUESTO SI VEDE MEGLIO USANDO L'ESPONENZIALE

COMPLESSO $z_0 \in \mathbb{C}$ $\left(e^{a+ib} = e^{a}(\cos(b) + i \sin(b)) \right)$

$$\int P(x)\, e^{z_0 x}\, dx = (\text{per parti}) = P_1(x)\, e^{z_0 x} + \text{cost.}$$

dove (P è un polinomio) P_1 polinomio dello stesso grado di P

DA QUESTA FORMULA POSSO RICAVARE (per esempio)

$$\int x^2 e^{ix}\, dx = (a x^2 + bx + c)\, e^{ix} + \text{cost.}$$

cerchiamo a, b, c

$$\frac{d}{dx}(a x^2 + bx + c)\, e^{ix} = (2a x + b)\, e^{ix} + (i a x^2 + i b x + i c)\, e^{ix} =$$

$$\left(i a x^2 + (ib + 2a)\, x + ic + b\right) e^{ix} \underset{(\text{VOGLIO})}{=} x^2 e^{ix}$$

$$\begin{cases} ia = 1 \\ ib + 2a = 0 \\ ic + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{i} = -i \\ ib - 2i = 0 \\ ic + b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -i \\ b = 2 \\ c = \frac{-2}{i} = 2i \end{cases} \quad \begin{matrix} a = -i \\ b = 2 \\ c = 2i \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \int x^2 e^{ix}\, dx = (-ix^2 + 2x + 2i)\, e^{ix} + \text{cost.}$$

$\Updownarrow$ (scrivendo chi è e^{ix}

$$\int x^2 \cos(x)\, dx + i \int x^2 \sin(x)\, dx = (-ix^2 + 2x + 2i)(\cos(x) + i \sin(x)) + c$$

$$= \cos(x)(-ix^2 + 2x + 2i) + \sin(x)(x^2 + 2ix - 2) =$$

$$= \underbrace{x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x)}_{\text{PARTE REALE}} + i\Big(\underbrace{-x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2\cos(x)}_{\text{PARTE IMMAGINARIA}}\Big) + \text{cost}$$

DUNQUE

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + c$$

$$\int x^2 \sin(x)\, dx = -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2\cos(x) + c$$

$$\int e^x \sin(2x)\, dx = \quad \text{PER PARTI con } f(x) = e^x \text{ e } G(x) = \sin(2x)$$

$$e^x \sin(2x) - \int e^x \cos(2x) \cdot 2\, dx = \quad (\text{altra int. per parti})$$

$$e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - \int 4 e^x \sin(2x)\, dx$$

PORTO L'ULTIMO INT. A SX $\Rightarrow$

$$5 \int e^x \sin(2x)\, dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) + cost$$

$$\int e^x \sin(2x)\, dx = \frac{e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x)}{5} + cost.$$

VERSIONE COMPLESSA:

$$\int e^x \cdot \underset{\left(\cos(2x) + i \sin(2x)\right)}{\underset{\uparrow}{e^{2ix}}}\, dx = \int e^{(1+2i)x}\, dx = \frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i} + cost.$$

$$\Updownarrow$$

$$\int e^x \cos(2x)\, dx + i \int e^x \sin(2x)\, dx = \frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i} + cost =$$

$$\frac{(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} e^{(1+2i)x} + c = \frac{(1-2i)}{5} e^x \left(\cos(2x) + i \sin(2x)\right) + c =$$

$$1 - (2i)^2 = 1 - (-4) = 5$$

$$e^x \frac{\left(\cos(2x) + 2\sin(2x)\right) + i\left(-2\cos(2x) + \sin(2x)\right)}{5} + c$$

$$\Updownarrow$$

$$\int e^x \cos(2x)\,dx = \frac{\cos(2x) + 2\sin(2x)}{5} e^x + c$$

$$\int e^x \sin(2x)\,dx = \frac{-2\cos(2x) + \sin(2x)}{5} e^x + c$$

ANALOGAMENTE (CON MOLTA PAZIENZA ...) $\int P(x)\, e^{ax} \sin(bx)$

$\int P(x)\, e^{ax} \cos(bx)$

$\rightsquigarrow \int P(x)\, e^{z_0 x}\, dx \qquad z_0 = a + ib$ (PER PARTI ..)

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ G(x)}}{x}\, \underbrace{e^x \sin(x)}_{f(x)}\, dx = \circledast \text{ faccio uno per parti}$$

MI SERVE $F(x) = \int e^x \sin(x)\, dx \to$ LO FACCIO COME PRIMA

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx =$$

$$e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x)\,dx \iff$$

$$F(x) = \int e^x \sin(x) = \frac{e^x}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) \quad (+c)$$

TORNANDO AL PRIMO INT.

$$(*) = x\,\frac{e^x}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) - \int e^x \frac{\left(\sin(x) - \cos(x)\right)}{2}\,dx = (**)$$

RIMANE DA CALCOLARE $\int e^x \cos(x)\,dx$:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x)$$

$$- \int e^x \cos(x)\,dx \implies \int e^x \cos(x)\,dx = e^x \frac{\left(\cos(x) + \sin(x)\right)}{2}$$

$$(**) = \frac{x}{2} e^x \left(\sin(x) - \cos(x)\right) - \frac{e^x}{4}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + \frac{e^x}{4}\left(\cos(x) + \sin(x)\right) + c$$

$$= \frac{x}{2} e^x \left(\sin(x) - \cos(x)\right) + \frac{e^x}{2} \cos(x) + \text{cost.}$$

(A MENO DI ERRORI DI CALCOLO..)

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{(A) ponendo } x = \sinh(t) \\ \searrow \text{(B) per parti come l'analogo } \int\sqrt{1-x^2}\,dx \end{array}$$

(B) $$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arcsinh}(x) + \int \underset{G(x)}{\overset{\uparrow}{x}} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}_{f(x)}\,dx =$$

$$\left(\text{NOTO CHE, se } F(x) = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow F'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} = f(x) \right)$$

$$= \operatorname{arcsinh}(x) + x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(x) + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \text{cost}$$

METODO A $\quad x = \sinh(t) \Rightarrow dx = \cosh(t)\,dt$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+\sinh^2(t)}\,\cosh(t)\,dt = \int \cosh^2(t)\,dt = \circledast$$

" FORMULE IPERBOLICHE " $\quad \cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) =$

$$= 2\cosh^2(t) - 1$$

$$\circledast = \int \frac{1+\cosh(2t)}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sinh(2t)}{4} + \text{cost}$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\sinh(t)\overbrace{\cosh(t)}^{\sqrt{1+\sinh^2(t)}}}{2} + \text{cost} \quad \left(\text{uso } t = \operatorname{arcsinh}(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(x) + \frac{x}{2}\underbrace{\cosh(\operatorname{arcsinh}(x))}_{\sqrt{1+x^2}} + \text{cost} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(x) + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \text{cost}$$