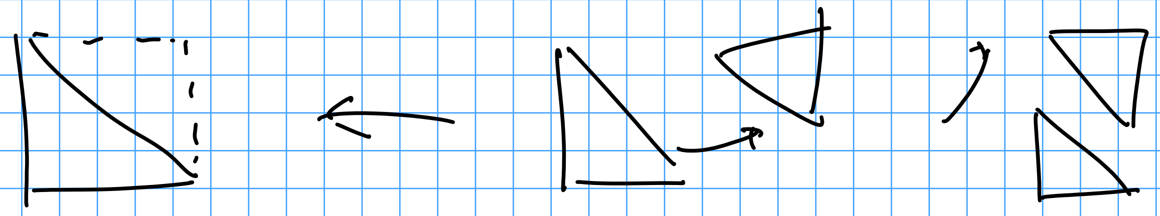
Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 25, 15 marzo 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

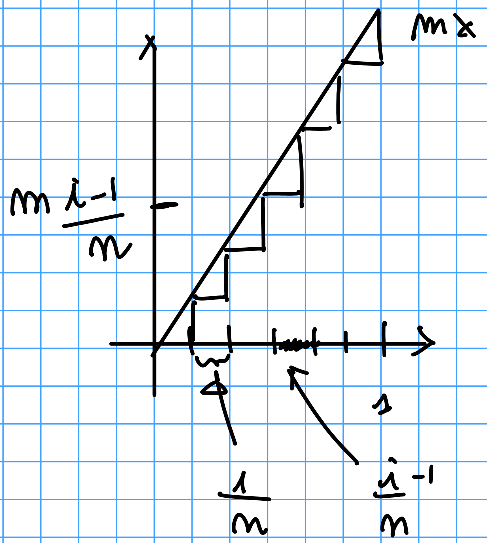
Altro esempio di "calcolo diretto" (a partire dalla def.) di un integrale. AREA DEL TRIANGOLO . . .



NON SO FARE QUESTO DISCORSO

USO LA DEFINIZIONE PER TROVARE L'INTEGRALE DI

$f(x) = mx$ $\quad m > 0$, $\quad$ SU $[0,1]$



DATO CHE $f(x)$ è crescente $\Rightarrow$ è integrabile — per trovare l'int. cerco le somme inferiori (superiori) su suddivisioni EQUISPAZIATE

e faccio il limite al tendere a zero dell'"ampiezza" della suddivisione.

Se divido $[0, 1]$ in n sottointervalli eguali $\rightarrow$

sottointervalli: $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ $\quad i = 1, 2, \dots, n$

(di ampiezza $\frac{1}{n}$) e su ognuno di questi intervalli

$$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_{i-1}) = m \frac{(i-1)}{n} .$$

SOMMO TUTTE LE AREE :

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{BASE}} \cdot \underbrace{\frac{m(i-1)}{n}}_{\text{ALTEZZA}} = \frac{m}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{m}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$= \frac{m}{n^2} \frac{(n-1)(n)}{2} \xrightarrow{n \to \infty} \boxed{\frac{m}{2}}$$

AREA TRIANGOLO DI BASE 1 e ALTEZZA m

ORA CERCHIAMO UN MODO PIÙ SEMPLICE DI FARE IL CALCOLO DELL' INTEGRALE.

CONCETTO DI PRIMITIVA

Def. Data una funzione $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, CHIAMO PRIMITIVA DI f una qualunque funzione $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $F' = f$

NOTA Se c'è una primitiva $F \Rightarrow$ anche $F+K$ è primitiva di f, per ogni $K \in \mathbb{R}$.

TEOREMA Se ho due primitive F_1 e F_2 di f (SULL'INTERVALLO $[a,b]$), allora F_1 ed F_2 differiscono per una costante; cioè $\exists K \in \mathbb{R}$ tale che

$$F_1(x) = F_2(x) + K \qquad \forall x \in [a,b]$$

(IN QUESTO MODO VEDO CHE LE PRIMITIVE DI f sono tutte descritte da $\{F: [a,b] \to \mathbb{R} : F(x) = F_0(x) + K, K \in \mathbb{R}\}$ se F_0 è una primitiva nota)

Per esempio, se $f(x) = x^2$, allora le sue primitive sono TUTTE E SOLE le funzioni $F(x) = \frac{x^3}{3} + K$, $K \in \mathbb{R}$

Dim. Chiamo $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Allora

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

Come si è visto (CONSEGUENZE DI Lagrange), ne segue $G(x)$ è costante. NE SEGUE LA TESI.

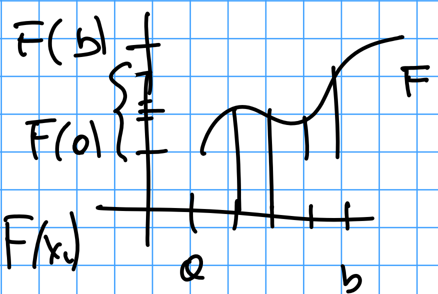
TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE (I)

Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile, se $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ è primitiva di f, allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \left(= \left[F(x)\right]_{x=a}^{x=b} = \left[F\right]_a^b \right)$$

Dim. Prendiamo $n \in \mathbb{N}$ e dividiamo $[a,b]$ in n sottointervalli di ampiezza $\frac{b-a}{n}$ (tutti uguali)

$[x_{i-1}, x_i] \quad i = 1 \dots n$



$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0)$$

$$= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots F(x_1) - F(x_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} (x_i - x_{i-1}) =$$

RAPPORTO INCR. DI F
TRA x_{i-1} e x_i

$$= \sum_{i=1}^{n} F'(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

per opportuni $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$
(uso Lagrange)

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

(F è primitiva di f)

SOMMA DI C.R. per f su $[a\,b]$
relativamente alla suddivisione in n parti eguali
e ai pti t_i . .

TENDE A $\int_a^b f(x)\,dx$ quando $n \to \infty$

DUNQUE, facendo tendere $n \to \infty$, otteniamo

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \square \qquad \text{Q.E.D.}$$

LISTA DI INTEGRALI DEDUCIBILI DAL TEOREMA:

(1) $f(x) = x^n$, Allora $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ è primitiva di f se $n \neq -1$ (Basta derivare $F(x)$ per vedere che $F'(x) = (n+1)\frac{x^n}{n+1} = x^n$

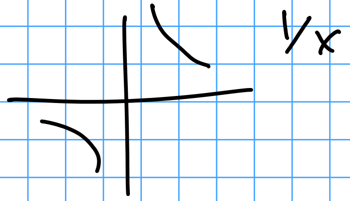
DUNQUE $\int_a^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \left(= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b \right)$

Questo vale per $n \in \mathbb{R}$, $n \neq -1$ - nel caso $n < 0$ devo sapere che $0 \notin [a,b]$ (altrimenti $f(x) = x^n$ non è limitata in $[a,b]$ e quindi non può essere integrabile

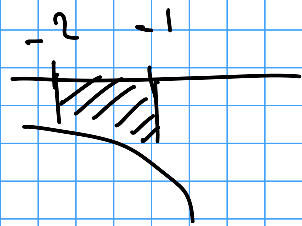
CASO $n = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ posso prendere $F(x) = \ln|x|$

$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \ln|b| - \ln|a|$ se $0 \notin [a,b]$

(va bene sia per $a, b > 0$ che per $a, b < 0$)



$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\, dx = \ln 1 - \ln(2) = \underline{\underline{-\ln(2)}}$$



---

(2) $f(x) = e^{ax}$ $\quad \underline{a \neq 0}$ posso prendere come primitiva

$F(x) = \dfrac{e^{ax}}{a}$ (basta notare che $F'(x) = a \dfrac{e^{ax}}{a} = e^{ax}$)

Dunque $\displaystyle\int_a^b e^{mx}\, dx = \frac{1}{m}\left(e^{mb} - e^{ma}\right)$

---

(3) se $f(x) = \sin(mx) \Rightarrow F(x) = -\dfrac{\cos(mx)}{m}$

se $f(x) = \cos(mx) \Rightarrow F(x) = \dfrac{\sin(mx)}{m}$

Proviamo a calcolare $\displaystyle\int_a^b \cos^2(x)\, dx$

(non è nella tabella vista fino ad ora..)

Posso usare le relazioni trigonometriche per esprimere $\cos^2(x)$ in termini LINEARI (sparisce il quadrato) del $\cos(2x)$:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = = 2\cos^2(x) - 1 \iff$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$ DUNQUE

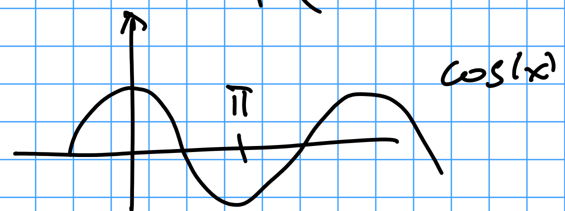
$$\int_a^b \cos^2(x)\,dx = \int_a^b \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx =$$

$$\int_a^b \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b \cos(2x)\,dx =$$

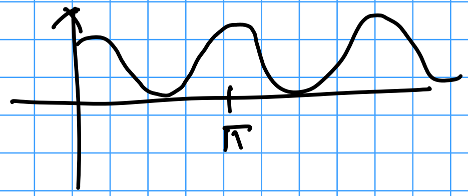
$$\parallel$$

$$\frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{4}\left(\sin(2b) - \sin(2a)\right)$$

Per es. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$



"POTENZA" $= \int_0^{\pi} \cos^2(x) = \dfrac{\pi}{2}$



(4) $F(x) = \arctan(x) \Rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Dunque $F(x) = \arctan(x)$ è primitiva di

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ cioè

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(b) - \arctan(a) \quad \forall a, b$$

(5) $F(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Dunque (una) primitiva di $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ è $F(x) = \arcsin(x)$

(6) (Funzioni iperboliche e loro inverse)

$$\sinh(x) := \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) := \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) := \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \qquad \left(\begin{array}{l} \frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x) \\ \frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x) \end{array} \right)$$

primitivo di $\sinh(x)$ è $\cosh(x)$ (+ cost.)

" " " $\cosh(x)$ è $\sinh(x)$ (+ cost.)

– $\operatorname{arcsinh}(x)$, $\operatorname{arccosh}(x)$, $\operatorname{arctanh}(x)$ le inverse

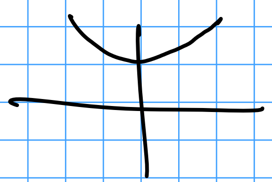
SI HA :

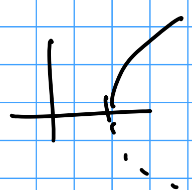
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh}(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

RELAZIONE FOND. $\boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1}$





DUNQUE: PRIMITIVA DI $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ è $F(x) = \operatorname{arcsinh}(x)$

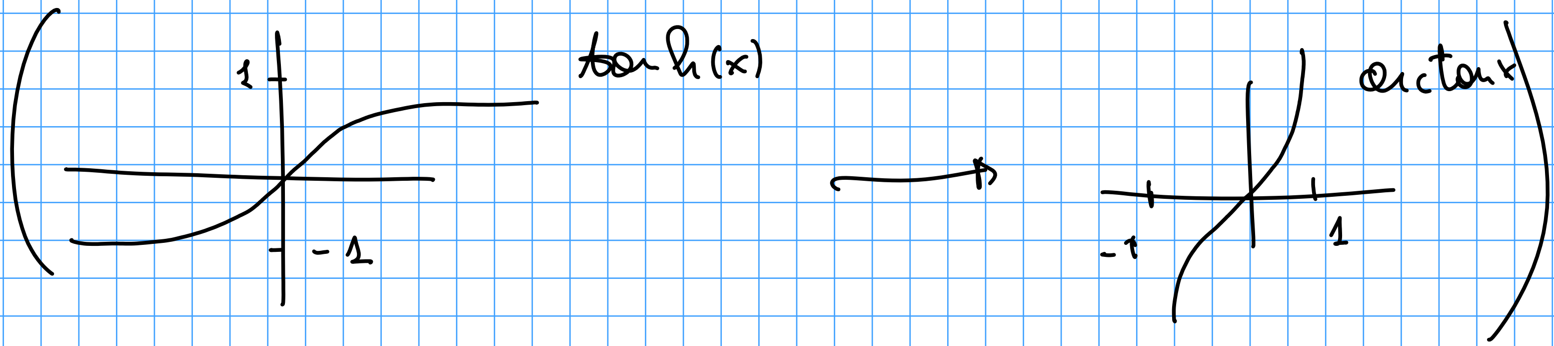
" " " $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ è $F(x) = \operatorname{arccosh}(x)$

" " $\dfrac{1}{1-x^2}$ è $F(x) = \operatorname{arctanh}(x)$

In realtà le inverse delle funzioni iperboliche si possono scrivere in termini di logaritmi - si potrebbe anche evitare di usarle - Però usando queste funzioni vengono delle "formule più pulite"

<u>Per esempio</u> $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{1-x^2} = \left[\operatorname{arctanh}(x)\right]_2^3$

Però posso anche notare che $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)} =$



$$= \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow \int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{1+x}\,dx - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln|1+x|\right]_2^3 - \frac{1}{2}\left[\ln|x-1|\right]_2^3 =$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln 4 - \ln(3)\right) - \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln(1)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln 4 - \ln(3) - \ln(2)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{6}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

questo è $\operatorname{arctanh}(3) - \operatorname{arctanh}(2)$

OLTRE ALLE PRIMITIVE TROVATE SOPRA ABBIAMO A DISPOSIZIONE LE FORMULE CHE SI OTTENGONO INVERTENDO LE FORMULE DI :

- DERIVATA DI $f \circ g$ (INTEGRAZIONE PER SOSTITUZ.)
- DERIVATA DI $f \cdot g$ (INTEGRAZIONE PER PARTI)

NOTAZIONE (INTEGRALE INDEFINITO)

Data f indichiamo con il simbolo $\int f(x)\,dx$

l'INSIEME DI TUTTE LE PRIMITIVE DI f.

QUINDI

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + cost. \qquad (n \neq -1)$$

(*) $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + cost$$

(*) ATTENZIONE le primitive di $\frac{1}{x}$ ha, in generale, due costanti diverse, una per $x>0$ e una per $x<0$. PERÒ se devo calcolare $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$ gli estremi a, b devono stare dalla stessa parte rispetto a zero ($0 \notin [a,b]$)

$$\int e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m} + cost \qquad m \neq 0$$

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a} + cost \qquad a \neq 0$$

$$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + cost.$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + cost$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + cost.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arcsinh}(x) + cost$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arccosh}(x) + cost.$$

TEOREMA (FORMULA DI INT. PER SOSTITUZIONE)

Siano f continua e g derivabile con g' continua definite su $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(g(t))\,g'(t) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

DIM. Io so che

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t))\, g'(t)$$

Dunque $f(g(t))$ è PRIMITIVA DI

$$f'(g(t))\, g'(t)$$

AMMETTIAMO DI CONOSCERE UNA PRIMITIVA DI f,
(vedremo che lo posso fare)
che chiamiamo F (cioè so che $F' = f$)

DA QUANTO scritto sopra ricavo che

$$\boxed{F(g(t)) \text{ è primitiva di } f(g(t))\, g'(t)}$$

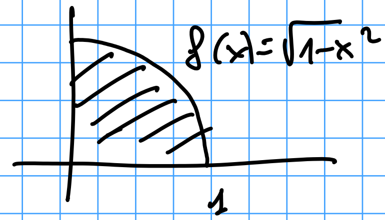
(sto applicando la derivata di $F(g(t))$

Per il teorema fond. calcolo int.

$$\int_a^b f(g(t))\, g'(t)\, dt = \Big[F(g(t)) \Big]_{t=a}^{t=b} = \Big[F(x) \Big]_{x=g(a)}^{x=g(b)}$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx$$

<u>ESEMPIO</u> $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$



"prendo" $x = \sin(t)$ cioè uso la formula di sostituzione con $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $g(t) = \sin(t)$

$g'(t) = \cos(t)$

$\Rightarrow$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\,\cos(t)\,dt = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

(PERCHÉ $\sin(0)=0$ / $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt = \frac{\pi}{4}$$ (conto come quello di prima)