Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 24, 9 marzo 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

INTEGRALE DI RIEMANN ~ IDEA DI "AREA"

→ (1) DEFINIRE COSA INTENDIAMO CON "AREA"
(quando una funzione è integrabile e cosa è l'integrale)

(2) Dire quali funzioni sono integrabili

(3) Trovare dei "metodi di calcolo effettivo"

---

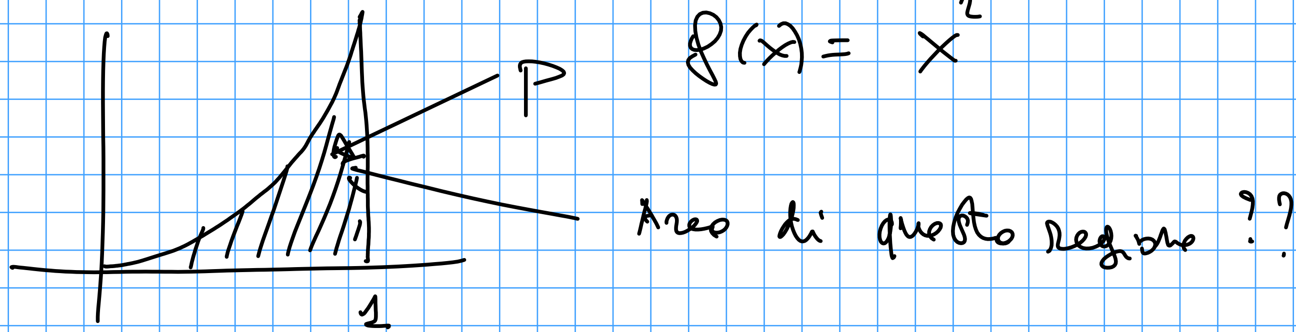
(1) Cosa è l'area di una figura ??

IDEA DI PARTENZA: • AREA DI UN RETTANGOLO = BASE X ALTEZZA

• Se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$ Area $(A \cup B) =$ area (A) + area (B)

• Se $A \subset B \Rightarrow$ Area $(A) \leq$ Area (B)

Esempio

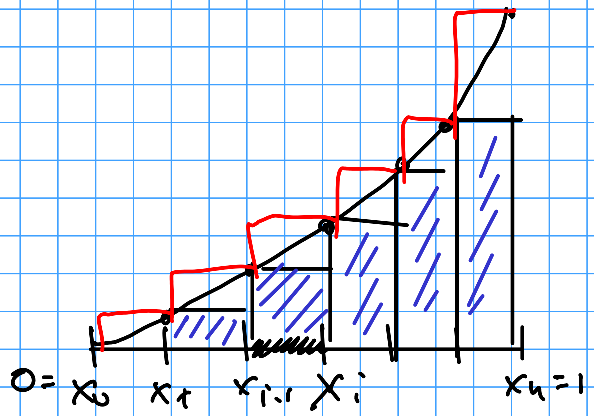


$f(x) = x^2$

Fisso $n \in \mathbb{N}$

Divido $[0, 1]$ in n sottointervalli di lunghezza $\frac{1}{n}$

$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n} \quad \ldots \quad x_n = \frac{n}{n} = 1$



Per ogni $i = 1 \dots n$ consideriamo il rettangolo di base $[x_{i-1}, x_i]$ e di altezza $(x_{i-1})^2$, chiaramente

$$(x_{i-1})^2 \le x^2 \le (x_i)^2 \qquad x_{i-1} \le x \le x_i$$

Sommiamo le aree di tutti questi rettangoli

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{BASE}} \cdot \underbrace{(x_{i-1})^2}_{\text{ALTEZZA}} \quad \leftarrow \text{AREA DELLA FIGURA BLU}$$

Analogamente consideriamo i rettangoli di base $[x_{i-1}, x_i]$ e altezza $(x_i)^2$, chiamiamo S_n la somma delle aree di questi altri rettangoli

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(x_i)^2$$

Se diamo per buono che la regione P abbia un'area, allora

$$s_n \le \text{Area}(P) \le S_n \qquad (\forall n \text{ intero})$$

Vediamo a cosa tendono s_n e S_n se $n \to \infty$.

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = 1/n$$
$$x_2 = 2/n$$
$$\vdots$$
$$x_i = i/n$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 =$$

$$\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)(2n-1)\,n}{6}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \right)$$

$$\frac{2n^3 + o(n^3)}{6n^3} \to \frac{1}{3}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6n^3} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

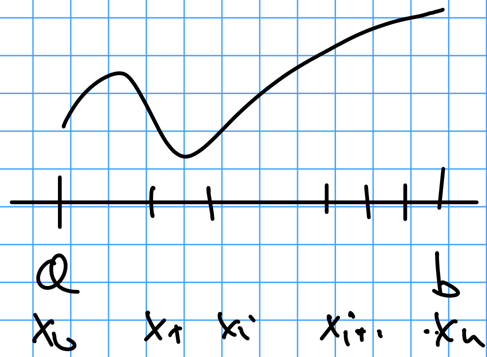
NE SEGUE $\boxed{\text{Area}(P) = \frac{1}{3}}$

---

seguendo questo esempio facciamo una definizione generale di area / integrale

Partiamo da una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,

f LIMITATA (per ora considero parti LIMITATE del piano)



CHIAMO "SUDDIVISIONE" di $[a, b]$ una $(1+n)$-pla di punti $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$

$$x_0 = a, \quad x_n = b$$

(ordinati in modo crescente)

$\sigma = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$. Dato la suddivisione σ pongo

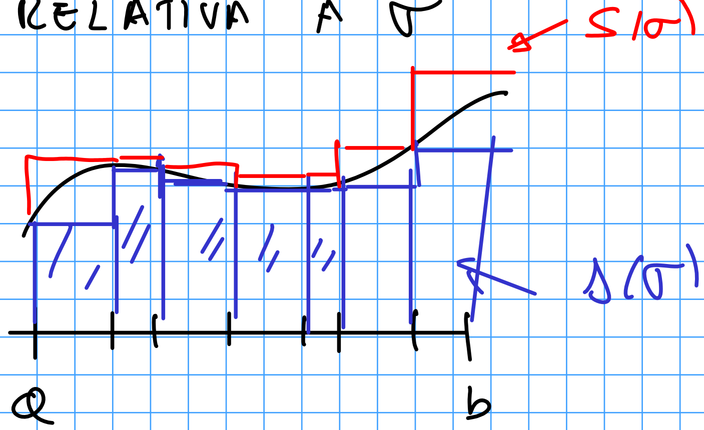
$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

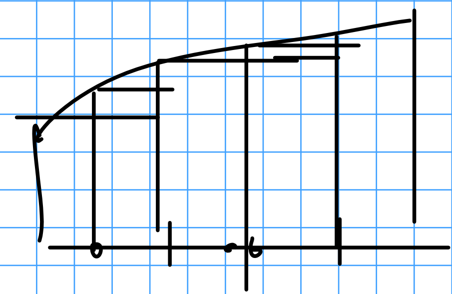
($\in \mathbb{R}$ poiché f è limitata)

$$s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \qquad S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

SOMMA INFERIORE RELATIVA A σ



SOMMA SUPERIORE RELATIVA A σ



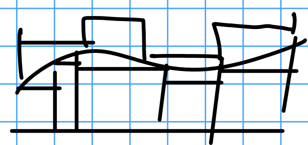
<u>FATTI</u> (senza dim.)

- $s(\sigma) \leq S(\sigma) \quad \forall\, \sigma$ suddivisione.
- Se σ_2 è più fine di σ_1, cioè $\sigma_1 \subset \sigma_2$

  allora
  $$s(\sigma_1) \leq s(\sigma_2)$$
  $$S(\sigma_1) \geq S(\sigma_2)$$

- Date due qualunque suddivisioni $\sigma_1 \ \sigma_2 \Rightarrow$

(*) $$s(\sigma_1) \leq S(\sigma_2)$$



In effetti posso costruire $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \Rightarrow \sigma$ è più fine di σ_1 e di σ_2. Ne segue

$$s(\sigma_1) \le s(\sigma) \le S(\sigma) \le S(\sigma_2)$$

<u>DUNQUE</u> (segue da $\circledast$)

$$\underbrace{\sup_{\sigma} s(\sigma)}_{\int_{a*}^{b} f(x)\,dx} \le \underbrace{\inf_{\sigma} S(\sigma)}_{\int_{a}^{b*} f(x)\,dx}$$

(INTEGRALE INFERIORE) (INTEGRALE SUPERIORE)

(SECONDO RIEMANN)

<u>DEF.</u> $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, LIMITATA, si dice "INTEGRABILE" se

$$\sup_{\sigma} s(\sigma) = \inf_{\sigma} S(\sigma) \quad \left(\text{cioè } \int_{a*}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b*} f(x)\,dx \right)$$

In tal caso chiamo "INTEGRALE" il valore comune di $\int_{a*}^{b} f(x)\,dx$ / $\int_{a}^{b*} f(x)\,dx$ e lo indico con

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

FATTO f è integrabile SE E SOLO SE

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \sigma$ SUDDIVISIONE TALE CHE

$$S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon$$

(NO DIM.)

OPPURE f è integrabile se e solo se

esiste una successione $\{\sigma_n\}$ di suddivisioni tali che

$$S(\sigma_n) - s(\sigma_n) \longrightarrow 0 .$$ In questo caso

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} s(\sigma_n)$$

IN QUESTA LUCE L'ESEMPIO FATTO ALL'INIZIO DICE CHE

$f(x) = x^2$ è integrabile su $[0,1]$ e $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

CONTROESEMPIO (funzione NON integrabile)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(FUNZIONE DI DIRICHLET)

QUESTA FUNZIONE <u>NON</u> È INTEGRABILE.

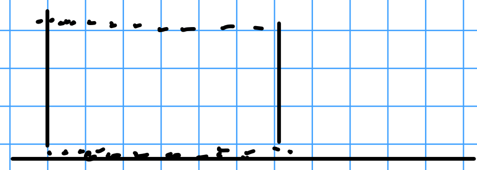
Infatti sia $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una suddivisione.

$i = 1 \dots n$

$$M_i := \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = 1$$ (tra x_{i-1} e x_i c'è un numero irrazionale)

$$m_i := \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = 0$$ (tra x_{i-1} e x_i c'è un numero razionale)

NON C'È L'AREA !!



$$\Rightarrow \quad S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} 1\,(x_{i-1} - x_i) = 1$$

$$s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_{i-1} - x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_{0\,*}^{1} f(x)\,dx = 0 < 1 = \int_{0}^{1\,*} f(x)\,dx$$

ABBIAMO DEFINITO COSA È PER NOI L'AREA

(L'INTEGRALE).

Definizione alternativa (VEDI LIBRO)

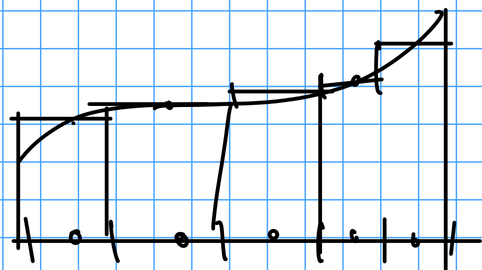
- Dato n divido $[a\ b]$ in n parti <u>EGUALI</u>

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad \dots \quad x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

- Per ogni sottointervallo $[x_{i-1}, x_i]$ scegliamo (a caso) un punto $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$

- Consideriamo $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(t_i)$



↑

SOMMA DI CAUCHY-RIEMANN

DICO CHE f è integrabile se le somme di Cauchy-Riemann AMMETTONO LIMITE per $n \to \infty$, <u>INDIPENDENTE</u> dalle (infinite scelta dei punti t_i

FATTO Se f è integrabile nel senso detto all'inizio $\Longrightarrow$ f è integrabile secondo la def. alternativa, dato che se σ_n = suddivisione in n sottointervalli uguali $\Longrightarrow$

$$s(\sigma_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) f(t_i) \leq S(\sigma_m)$$

(per qualunque scelta dei t_i)

DUNQUE, se $s(\sigma_n)$ e $S(\sigma_n)$ hanno lo stesso limite I anche le somme di C. R. convergono a I.

VALE ANCHE IL VICEVERSA (NO DIM.)

COMMENTO SULLA NOTAZIONE:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ ← POTREI SCRIVERE $$\int_a^b f$$

* x è una "variabile muta"

$$\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 z^2\,dz$$

DAL PUNTO DI VISTA FORMALE dx serve solo a dire quale è la variabile; per es.

$$\int_0^1 (x^3+y^2)\,dy \leftarrow \text{FUNZIONE DI } x$$
NON E' FUNZIONE DI y

$$\not\parallel$$

$$\int_0^1 (x^3+y^2)\,dx$$

IDEA "INTUITIVA" $\int_0^b f(x)\,dx$ = somma di (infiniti) rettangoli di base dx (infinitesimo) e altezza $f(x)$

(IL SIMBOLO $\int$ è una lettera S $\leftarrow$ somma)

Punto 2 Di quali funzioni possiamo stabilire l'integrabilità

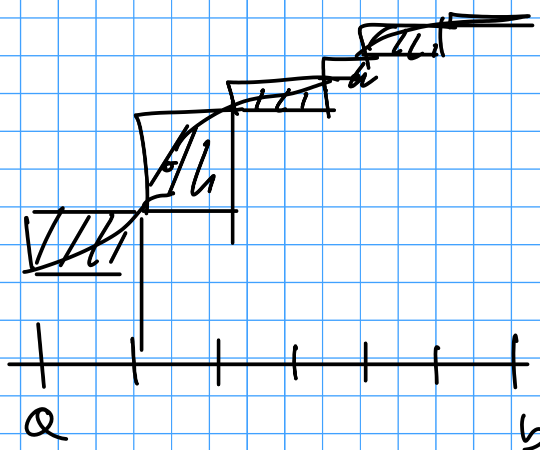
$\Rightarrow$ • LE FUNZIONI CONTINUE SONO INTEGRABILI

- LE FUNZIONI MONOTONE SONO INTEGRABILI (queste non sono necessariamente continue)

- SOMME E PRODOTTI DI FUNZIONI INTEGRABILI SONO INTEGRABILI

<u>TEOREMA</u> Se $f : [a, b] \to$, crescente (decrescente $\Rightarrow$) f è integrabile su $[a, b]$.

<u>DIM.</u> Prendo la suddivisione σ_n fatta di n sotto intervalli di ampiezza $\frac{b-a}{n}$



Per ogni $i = 1 \ldots n$

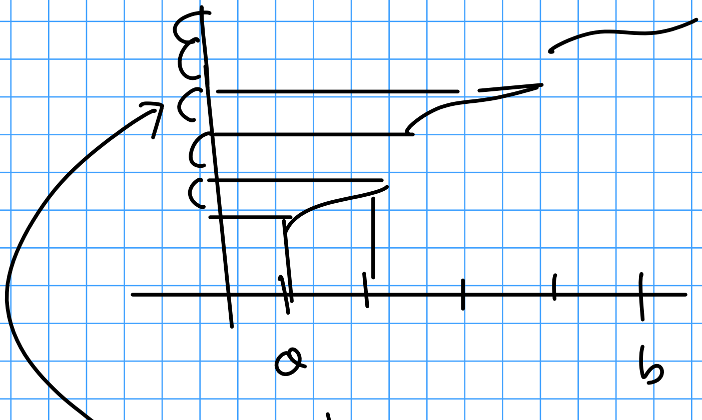
$$M_i := \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_i)$$

$$m_i := \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_{i-1})$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \frac{b-a}{n} \quad , \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \frac{b-a}{n}$$

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)}_{f(b)-f(a)} \quad !!$$

CONTA IL FATTO CHE f CRESCE



$f(x_i) - f(x_{i-1})$

$$= \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} \xrightarrow{\text{se } n \to \infty} 0$$

PER IL CRITERIO DETTO PRIMA $\Rightarrow$ f è integrabile.

<u>TEOREMA</u> Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f è continua $\Rightarrow$ f è integrabile su $[a,b]$

NON FACCIAMO LA DIM. COMPLETA. DIMOSTRIAMO IL CASO (PIÙ RESTRITTIVO) IN CUI f È <u>LIPSCHITZIANA</u>, cioè supponiamo che esista L t.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x,y \in [a,b]$$

(IN REALTÀ QUESTA IPOTESI NON SERVE, MA LA DIM. DEL CASO GENERALE È PIÙ COMPLICATA)

VEDIAMO LA DIM. Prendiamo una suddivisione

$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Costruiamo $s(\sigma)$ e $S(\sigma)$:

Per ogni $i = 1 \dots n$ considero

x_i' e x_i'' in $[x_{i-1}, x_i]$ tali che (pto di minimo e pto di massimo)

$$f(x_i') \leq f(x) \leq f(x_i'')$$

$$\Rightarrow S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i'')(x_i - x_{i-1}) \quad ; \quad s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i')(x_i - x_{i-1})$$

$$S(\sigma) - s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i'') - f(x_i')\right)(x_i - x_{i-1}) \leq$$

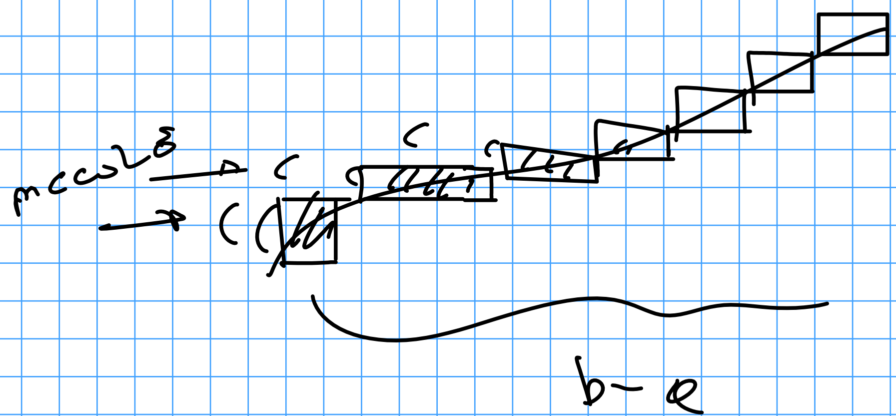
DISUGUAGLIANZA DI LIP.

$$\sum_{i=1}^{n} L(x_i'' - x_i')(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$L \max_{i=1..n} (x_i - x_{i-1}) \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) =$$

$$L \max_{i=1..n} (x_i - x_{i-1}) (b-a)$$

questa ultima espressione tende a zero se sceglo delle suddivisioni σ tali che $\max_{i=1..n} x_i - x_{i-1} \to 0$



PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI INTEGRABILI

- Se f è integrabile, $f \geq 0$ su $[a,b]$

  ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

$\left(\text{Se } f, g \text{ integrabili}, \; f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x) \right)$

- Le funzioni integrabili formano uno spazio vettoriale e l'integrale è un'operazione lineare. CIOÈ:

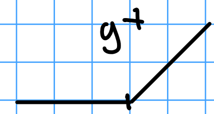
Se f e g sono integrabili, se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\lambda f + \mu g$ è integrabile. INOLTRE

$$\left(\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \right) \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

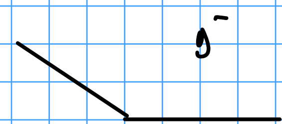
- Se f e g sono integrabili $\Rightarrow f \cdot g$ è integrabile

- Se f è integrabile e $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana $\Rightarrow$ $G \circ f$ è integrabile. PER ESEMPIO POSSO PRENDERE

$G(y) = y^+$ (PARTE POSITIVA DI y) $= \begin{cases} y & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$



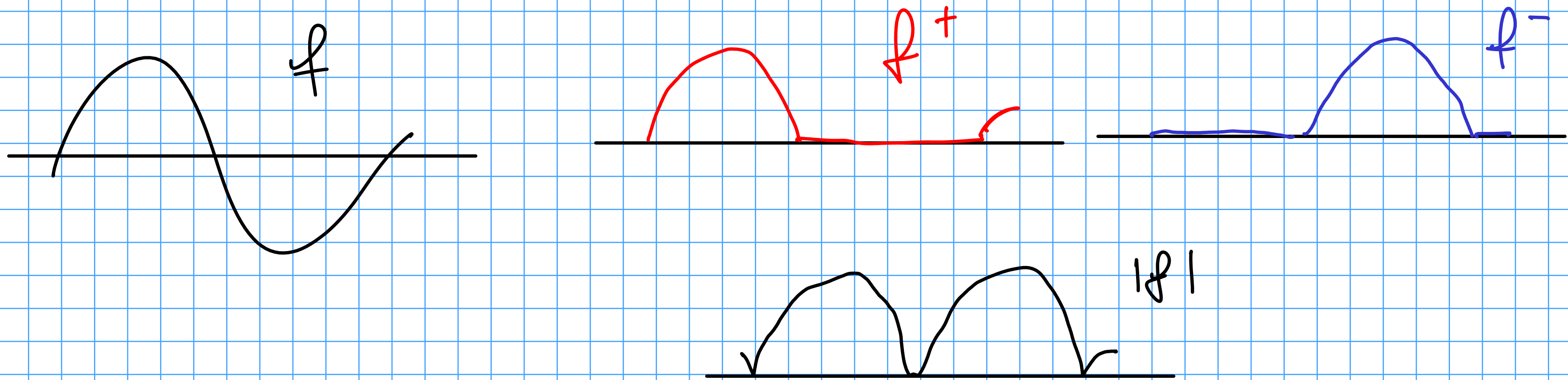
$G(y) = y^-$ (" " NEGATIVA DI y) $= \begin{cases} 0 & \text{se } y \geq 0 \\ -y & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$



$G(y) = |y|$ NOTA $|y| = y^+ + y^-$, $y = y^+ - y^-$

(TUTTE LIPSCHITZIANE CON $L = 1$). $\Longrightarrow$

se f è integrabile, allora $f^+(x)$, $f^-(x)$, $|f(x)|$ sono integrabili.



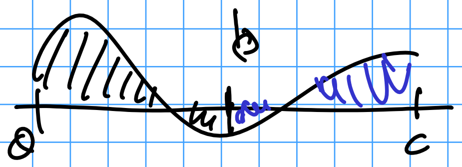
- $f : [a, c] \to \mathbb{R}$, limitata e $a \leq b \leq c$. Allora

f INTEGRABILE SU $[a, c]$

se e solo se

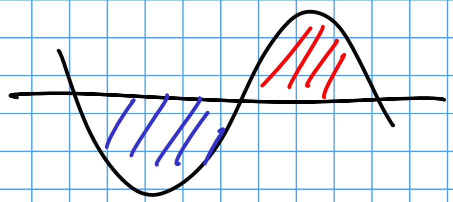
f INTEGRABILE SU $[a, b]$ e f INTEGRABILE SU $[b, c]$

Inoltre $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$



(ADDITIVITÀ RISPETTO "ALLA BASE")

OSSERVAZIONE L'INTEGRALE È UN'AREA CON SEGNO



$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \text{AREA ROSSA} - \text{AREA BLU}$$

DEFINIZIONE Se $a > b$ CONVENIAMO CHE

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

CON QUESTA DEFINIZIONE SI HA CHE

Data $f : I \to \mathbb{R}$ integrabile su I intervallo, dati $a, b, c \in I$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

(INDIPENDENTEMENTE DALL' ORDINE DI a, b, c)

Per esempio se $a < c < b$. Io so per il teorema di prima che

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \iff$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{(per la def.)}$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \qquad \text{OK}$$

Def. Chiamo medio (integrale) di f su $[a,b]$ l'espressione

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \left(= \fint_a^b f(x)\,dx \right)$$

Teorema Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile $\Rightarrow$ (Teorema della media)

$$\inf_{[a,b]} f \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \sup_{[a,b]} f$$

Se poi f è continua, esiste $t \in [a,b]$ tale che

$$f(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Dim.</u> È chiaro che $\forall x \in [a,b]$

$$m := \inf_{[a,b]} f \le f(x) \le \sup_{[a,b]} f =: M$$ INTEGRANDO

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

(segue dalla def. di integrale)

Se divido per $b-a$ trovo la tesi.

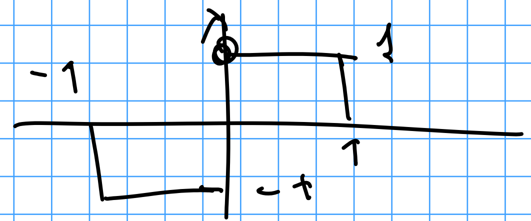
Se f è continua $\Rightarrow$ esistono x' x'' tali che $m = f(x')$

$M = f(x'')$; quindi $f(x') \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{y} \le f(x'')$

PER IL TH. DEI VALORI INTERMEDI $\exists\ t$ tra x' e x'' $(t \in [a,b])$

per cui $f(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

(Se f NON È CONTINUA LA SECONDA PARTE PUÒ ESSERE FALSA $\rightarrow$



3 PARTE (teoremi del "calcolo integrale") SERVE LA

NOZIONE DI "PRIMITIVA"

Def. Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dico che (un'altra funzione) F è PRIMITIVA (o ANTIDERIVATA) di f SE

$$F' = f$$

$\frac{x^3}{3} + 1$ è primitiva di x^2