Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 23, 8 marzo 2013

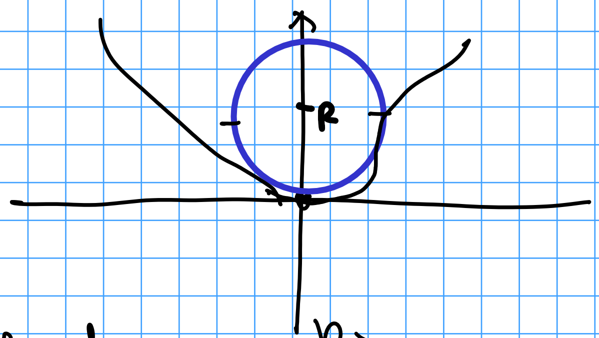
(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

Derivata seconda - significato geometrico e legame con la convessità

Derivata II ~ "CURVATURA" del grafico vicino a x_0

CASO PRINCIPALE $f: I \to \mathbb{R}$, derivabile 2 volte

e per esempio $f(0) = 0$ $f'(0) = 0$



(poi si può complicare...)

Prendiamo $R > 0$ e il cerchio di centro $(0, R)$ e raggio R. Supponiamo che R sia tale che il grafico di f sia sotto il grafico del cerchio per le x vicino a zero. COSA SIGNIFICA analiticamente questa proprietà!

$$f(x) \leq R - \sqrt{R^2 - x^2}$$

(il cerchio ha equazione $x^2 + (y-R)^2 = R^2$)

Usiamo Taylor: $f(x) = \frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2)$

$$R - \sqrt{R^2 - x^2} = R\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{1/2}\right) = R\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{R^2} + o(x^2)\right)\right)$$

$$= R\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{R^2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2R} + o(x^2)$$

Se vale la disuguaglianza di prima:

$$\frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2) \leq \frac{x^2}{2R} + o(x^2)$$

$$\frac{x^2}{2}\left(f''(0) - \frac{1}{R}\right) \leq o(x^2) \quad (\Leftarrow)$$

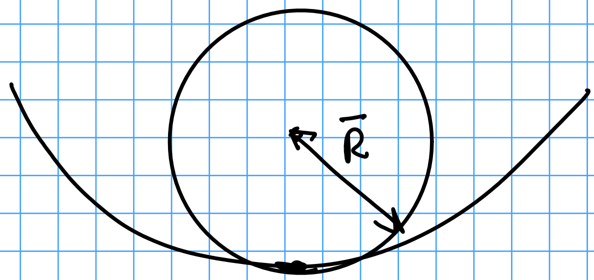
$$\left(f''(0) - \frac{1}{R}\right) \leq \frac{o(x^2)}{x^2} \cdot 2$$

Dato che $\frac{o(x^2)}{x^2} \to 0$ si ricava $f''(0) - \frac{1}{R} \leq 0$

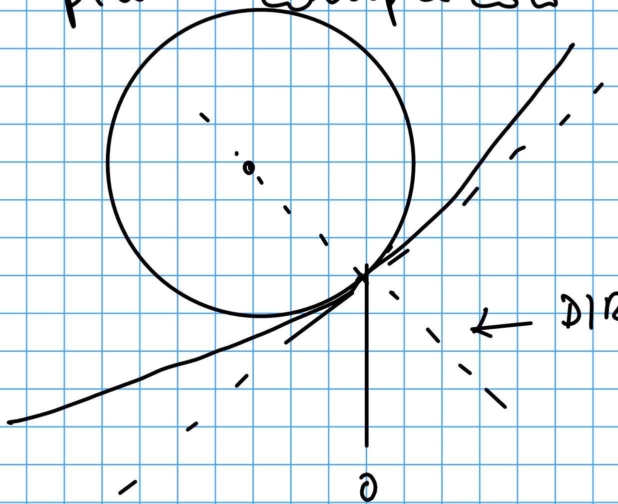
e cioè $f''(0) \leq \frac{1}{R} \iff R \leq \frac{1}{f''(0)}$

Se prendo $\bar{R} = \sup\{$raggi R con la proprietà sopra$\}$ (RAGGIO OSCULATORE) vedo che

$$\boxed{\bar{R} = \frac{1}{f''(0)}} \qquad (+\infty \text{ se } f''(0) = 0)$$



Se poi $f'(0) \neq 0$ bisogna fare una costruzione più complicata. IN OGNI CASO $f''(0)$ è legato al raggio del cerchio osculatore

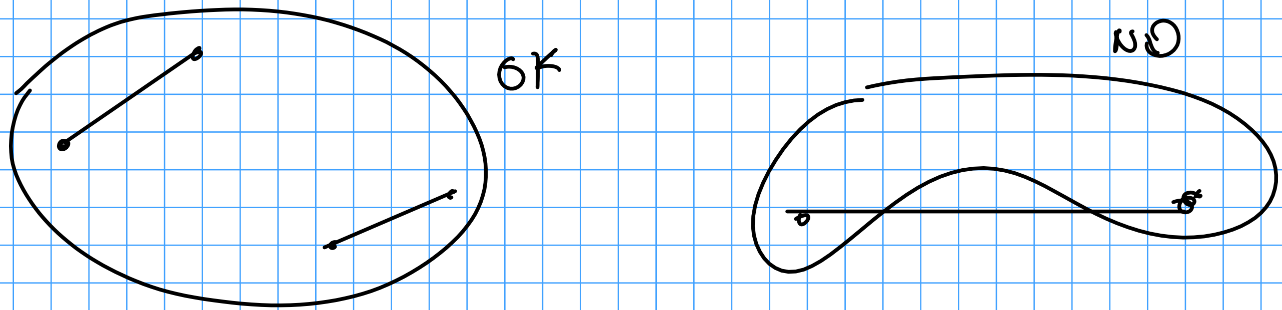


DIREZIONE NORMALE

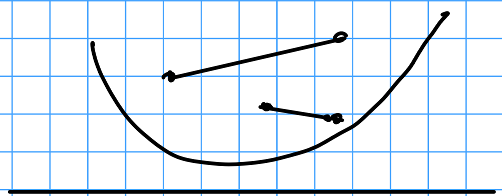
NOZIONE DI CONVESSITÀ

<u>Definizione</u> $A \subset \mathbb{R}^N$ si dice convesso se dati due punti P_1 e P_2 in $A \Rightarrow$

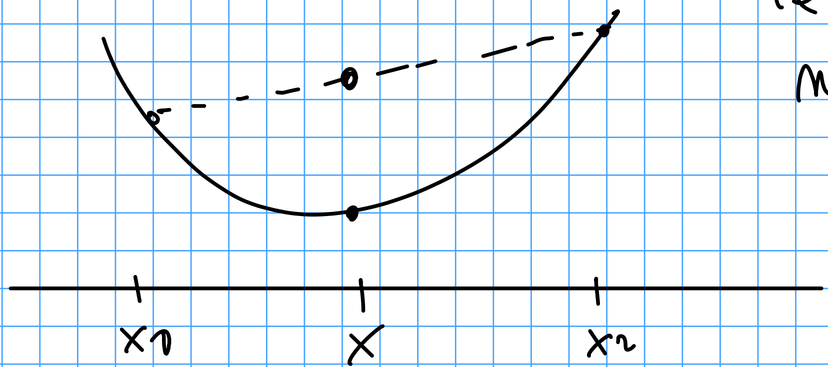
tutto il segmento di estremi P_1 e P_2 è contenuto in A



Def. Data $f: I \to \mathbb{R}$ (I INTERVALLO), f si dice CONVESSA, se il "sopragrafico" $\{(x, y) : x \in I, y \geq f(x)\}$ è convesso



NON È DIFFICILE VEDERE CHE LA DEF. SOPRA EQUIVALE a DIRE CHE presi due punti del GRAFICO $\Rightarrow$



il segmento è contenuto nel sopragrafico

QUESTO SI DICE ANALITICAMENTE:

$\forall \quad x_1 < x < x_2 \quad \Rightarrow$

$$f(x) \le \underbrace{f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)}_{\text{retta per } (x_1, f(x_1)) \quad (x_2, f(x_2))} \qquad (*)$$

(La (*) è equivalente a: $\forall x_1\ x_2,\ \forall t \in [0,1]$

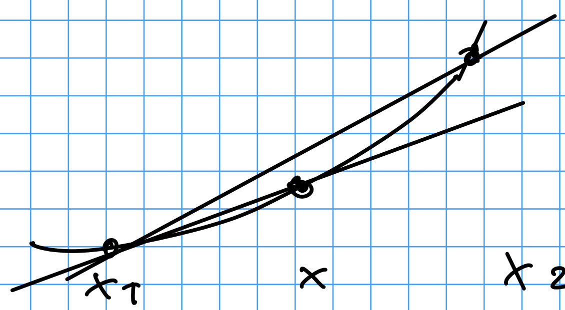
$$f(\underbrace{t x_1 + (1-t)x_2}_{x}) \le t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$

x ("COMBINAZIONE CONVESSA TRA x_1 e x_2"))

NOTIAMO CHE (*) si può riscrivere:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_1-x_2} \quad \text{se} \quad x_1 < x < x_2$$

RAPPORTI INCREMENTALI



QUINDI LA CONVESSITÀ EQUIVALE A DIRE CHE IL RAPPORTO INCREMENTALE

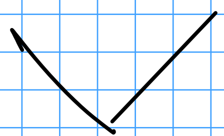
$$R(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

è crescente in x $(\forall x_0)$

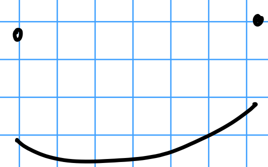
(l'abbiamo visto se $x > x_0$, ma si può fare anche per $x < x_0$ ..)

NOTA: FINO AD ORA NON SERVONO DERIVATE

<u>ESEMPIO</u> $f(x) = |x|$ è convessa



<u>FATTO</u> Se f è convessa su $[a,b] \Longrightarrow$ f è continua su $]a,b[$



(NO DIM)

TEOREMA Sia f derivabile. Allora

$$f \text{ convessa} \iff f' \text{ è crescente}$$

CONSEGUENZA: Se f ha derivata II° allora

$$f \text{ convessa} \iff f''(x) \geq 0 \quad (\text{in } [a\ b])$$

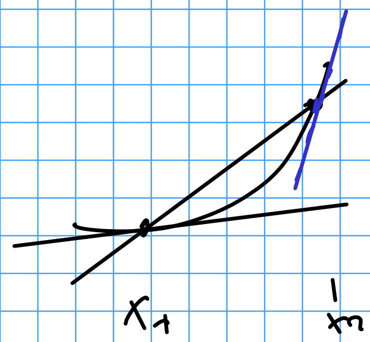
DIM. del teorema $\Rightarrow$ Supponiamo f convessa.

Prendiamo $x_1 < x_2$. Allora preso x tra x_1 e x_2 si ha: (per la convessità)

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Se $x \to x_1$ (da sinistra) ottengo

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$



Analogamente possiamo scrivere

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad , \text{se } x \to x_2$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \le f'(x_2)$$

e quindi $\quad f'(x_1) \le f'(x_2)$

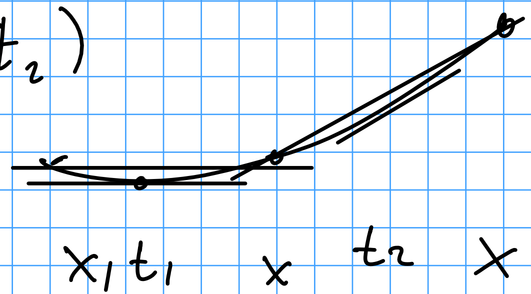
$\Leftarrow$ (viceversa) Supponiamo f' crescente

voglio dedurre che il rapp. incr. è crescente

Voglio cioè che, se $x_1 < x < x_2$

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

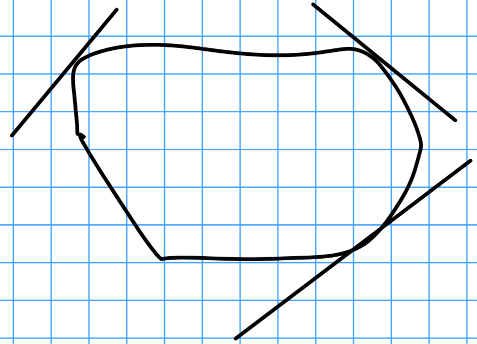
$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ f'(t_1) & & f'(t_2) \end{array}$$



Uso Lagrange per dovere due punti $x_1 < t_1 < x$ e $x < t_2 < x_2$

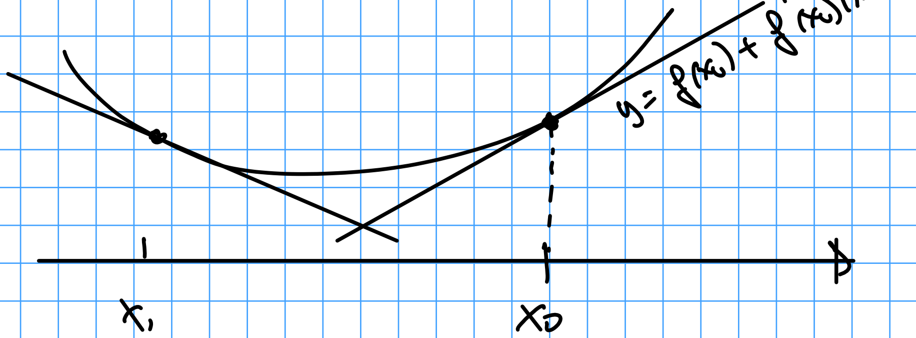
Per ipotesi $f'(t_1) \le f'(t_2)$ DUNQUE VALE LA TESI

ALTRA PROPRIETÀ LEGATA ALLA CONVESSITÀ



TEOREMA Sia f derivabile. Allora

$$f \text{ è convessa } \iff f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall\, x_0, x \text{ in } I$$



(DICE CHE il grafico di f è sopra le rette tangenti)

DIM. $\Rightarrow)$ Sia f convessa. Fisso x_0 e $\underline{x > x_0}$

Sia inoltre $x_0 < t < x$. Dalla convessità:

$$\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se $t \to x_0$ trovo:

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(NOTA CHE $x - x_0 > 0$)

$$\Updownarrow$$

$$f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \leq f(x)$$

QUELLO CHE VOLEVO - SOLO SE $x > x_0$

Se invece $x < x_0$, prendo t con $x < t < x_0$ e ottengo dalla convessità che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(t) - f(x_0)}{x - x_0}$$

($x < t$!)

se $t \to x_0$ viene

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0)$$

moltiplico per $x - x_0$ che è < 0

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$$

... come PRIMA

$\Leftarrow$ (viceversa) Suppongo $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $\forall x_0 \, \forall x$

Prendiamo $x_1 < x < x_2$. Scrivo l'ipotesi con $x_0 = x$, sia per x_1, che per x_2:

$$f(x_1) \geq f(x) + f'(x)(x_1 - x) \qquad (\mathrm{I})$$

$$f(x_2) \geq f(x) + f'(x)(x_2 - x) \qquad (\mathrm{II})$$

da (I) ricavo $\dfrac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq f'(x)$

$(x_1 - x < 0)$

$\updownarrow =$

da (II) ricavo $\dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq f'(x)$

$(x_2 - x > 0)$

$\Rightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ che è

(equivalente alla) convessità

FINE

Per esempio posso ricavare

$$e^x \geq 1 + x$$

$\forall x \in \mathbb{R}$