Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 22, 15 dicembre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

$\alpha \in \mathbb{R}$ $$(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{n} \binom{\alpha}{i} x^i + o(x^n)$$

DOVE $$\binom{\alpha}{i} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-i+1)}{1\cdot 2 \quad 3 \cdots i}$$

NOTA: $\binom{\alpha}{1} = \alpha$ quindi $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + o(x)$

(VECCHIO LIMITE NOTEVOLE $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \to \alpha$)

VEDIAMO $\alpha = \frac{1}{2}$ cioè $\sqrt{1+x} = \ldots$

$$\binom{1/2}{i} = \frac{1/2\,(1/2-1)(1/2-2)\cdots(1/2-i+1)}{i!} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1-2}{2}\,\frac{1-4}{2}\,\frac{1-6}{2}\cdots\frac{1-2(i-1)}{2}\cdot\frac{1}{i!} =$$

$i-1$ fattori (-1)

$$\frac{1\,(-1)(2-1)(-1)(4-1)(-1)(6-1)\cdots(-1)(2(i-1)-1)}{2^i\quad i!} =$$

$$\frac{(-1)^{i-1}}{2^i\, i!}\, 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2i-3) = \frac{(-1)^{i-1}}{2^i\, i!}(2i-3)!!$$

DOVE $K!! =$ prodotto di tutti gli interi $\leq K$ con la stessa parità

$$6!! = 2\cdot 4\cdot 6 \qquad 9!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9$$

DUNQUE

$$\binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}\ ; \qquad \binom{1/2}{2} = \frac{(-1)^1}{2^2\cdot 2}\cdot 1 = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{(+1)\ 1\cdot 3}{2^3\cdot 6} = \frac{1}{16}$$

$$\binom{1/3}{4} = \frac{(-1)\ 1\cdot \cancel{3}\cdot 5}{2^4\cdot \cancel{24}_{8}} = -\frac{5}{128}$$

e così via...

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$$

PROVIAMO A SVILUPPARE $\sqrt[3]{1+x}$ fino all'ordine $n=3$

$$\binom{1/3}{i} \qquad i = 0, 1, 2, 3$$

$$\binom{1/3}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{1/3}{1} = 1/3$$

$$\binom{1/3}{2} = \frac{1/3\,(1/3-1)}{1 \cdot 2} = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{9}$$

$$\binom{1/3}{3} = \frac{1/3\,(1/3-1)\,(1/3-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{3}\left(-\frac{\cancel{2}}{3}\right)\left(\frac{-5}{3}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{2} \cdot 3} = \frac{5}{81}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[3]{1+x} = \underbrace{1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{81}}_{P_3(x)} + o(x^3)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{\sqrt{1+x}}{x}} - e\cos(x)}{x^2}$$

IDEA: TROVARE GLI SVILUPPI DI TAYLOR A NUMERATORE E A DENOMINATORE e IN PARTICOLARE TROVARE IL PRIMO TERMINE NON NULLO

NEL CASO SOPRA IL DEN. è x^2 (OTTIMO!)

A NUMERATORE BASTERÀ TROVARE IL POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE 2.

IN EFFETTI al numeratore POTREBBERO VERIFICARSI VARI CASI:

(1) $P_1(x) = aX$ con $a \neq 0$; cioè NUM $= ax + o(x)$

IN QUESTO CASO IL LIMITE VIENE ∞ $\left(\frac{ax + o(x)}{x^2} \to \infty \right.$

(IN QUESTO CASO IL CALCOLO DI P_2 è INUTILE)

(2) $P_1(x) = 0$, cioè NUM $= o(x)$; IN QUESTO CASO DEVO TROVARE $P_2(x)$, perché di $\frac{o(x)}{x^2}$ NON POSSO DIRE A COSA TENDE

SE $P_2(x) \neq 0$ VIENE NUM $= a x^2 + o(x^2)$ $\Rightarrow$ LIMITE $= a$

(3) $P_2(x) = 0$ allora NUM $= o(x^2)$; DATO CHE

$\frac{o(x^2)}{x^2} \to 0$ IL LIMITE FA ZERO

(NON OCCORRE TROVARE $P_3(x)$)

MORALE: SE A DENOMINATORE HO $x^2 + o(x^2)$
A NUMERATORE BASTA $P_2(x)$

ANALIZZIAMO IL TERMINE

$$(1+x)^{\frac{\sqrt{1+x}}{x}} = e^{\frac{\sqrt{1+x}}{x}\ln(1+x)}$$

(PASSAGGIO STANDARD: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$)

GUARDIAMO L'ESPONENTE

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x}\ln(1+x)$$

$\leftarrow$ VOGLIO IL POLINOMIO DI ORDINE 2

MI SERVE IL POLINOMIO DI ORDINE 3 DI $\ln(1+x)$;

per questo mi serve la derivata II^{a} di $\ln(1+x)$

$\frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{1}{1+x}$ (in $x_0=0 \to 1$) $\quad \frac{d^2}{dx^2}\ln(1+x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ IN $x_0=0$ $\downarrow$ -1

$$\frac{d^3}{dx^3} \ln(1+x) = 2(1+x)^{-3} \quad ; \text{ IN } x_0=0 \text{ VIENE } 2$$

$$\Rightarrow \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad \left(\frac{f''(0)}{2} = -\frac{1}{2} \, , \, \frac{f'''(0)}{6} = \frac{1}{3} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$$

<u>NOTA CHE</u> la formula sopra ci dice che, posto $h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, $h(0) = 1$

$\Rightarrow$ $h(x)$ è derivabile 2 volte e $h'(0) = -\frac{1}{2}$ $h''(0) = +\frac{2}{3}$

INOLTRE: SO CHE

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$$

FACCIO IL PRODOTTO

$$\sqrt{1+x} \, \frac{\ln(1+x)}{x} = \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) =$$

1. $\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)+\frac{x}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)-\frac{x^2}{8}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)$

$+o(x^2)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right) =$ (MI INTERESSANO SOLO I TERMINI DI GRADO ≤ 2)

$$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)+\frac{x}{2}\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)-\frac{x^2}{8}\left(1+o(1)\right)+o(x^2)\,O(1)=$$

$$1-\cancel{\frac{x}{2}}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)+\cancel{\frac{x}{2}}-\frac{x^2}{4}+o(x^2)-\frac{x^2}{8}+o(x^2)+o(x^2)=$$

$$\boxed{1-\frac{x^2}{24}+o(x^2)}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{8-6-3}{24}=\frac{-1}{24}$$

· $e^{\sim} = e^{1-\frac{x^2}{24}+o(x^2)} = e\,e^{-\frac{x^2}{24}+o(x^2)} = e\left(1-\frac{x^2}{24}+o(x^2)\right) =$

$e-\frac{e}{24}x^2+o(x^2)$ SE È COSÌ IL LIMITE $=+\infty$

· $\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ IN DEFINITIVA

LIMITE DIVENTA $\dfrac{e - \frac{e}{24}x^2 + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \dfrac{e-1+o(1)}{x^2} \to +\infty$

SE CI METTO e DAVANTI AL $\cos(x)$ TROVO: ⊗

$$\frac{e\left(\cancel{1} - \frac{1}{24}x^2 + o(x^2)\right) - e\left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} = e\,\frac{\frac{11}{24}x^2 + o(x^2)}{x^2} \to e\,\frac{11}{24}$$

⊗ $e^y = 1 + y + o(y)$

metto $y = -\frac{x^2}{24} + o(x^2) \Rightarrow$

$e^{-\frac{x^2}{24} + o(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{24} + o(x^2) + o\left(-\frac{x^2}{24} + o(x^2)\right)$

$= 1 - \frac{x^2}{24} + \underbrace{o(x^2) + o(O(x^2))}_{o(x^2)}$

ALTRI SVILUPPI IMPORTANTI

- $f(x) = \ln(1+x)$ in $x_0 = 0$

DALLA FORMULA DI TAYLOR:

$f(0) = 0$

$f'(x) = (1+x)^{-1}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -1(1+x)^{-2}$ $\qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$ $\qquad f'''(0) = 2$

$$f^{(i)} = (-1)^{(i-1)}(i-1)!\,(1+x)^{-i} \qquad f^{(i)}(0) = (-1)^{i-1}(i-1)!$$

$$\Rightarrow \text{coefficiente } i\text{-esimo} = (-1)^{(i-1)}\frac{(i-1)!}{i!} = \frac{(-1)^{i-1}}{i}$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i \underset{+o(x^n)}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\ln(1-x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i} + o(x^n) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$f(x) = \sin(x)$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x)$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x)$ $\qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x)$ $\qquad f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \sin(x)$ $\qquad$ SI RICOMINCIA

$$\Rightarrow \quad \sin(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{P_{2n+1}(x) = P_{2n+2}} + o(x^{2n+2})$$

perché non c'è il termine x^{2n+2}

$$\left(\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)$$

RIFACENDO GLI STESSI CALCOLI SI TROVA CHE

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+2})$$

USANDO LE SOMMATORIE

$$\sin(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (-1)^m \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{P_{2n+1} = P_{2n+2}} + o(x^{2n+2})$$

$P_{2n} = P_{2n+1}$

$$\cos(x) = \overbrace{\sum_{i=0}^{m} (-1)^m \frac{x^{2n}}{(2m)!}}^{P_{2n} = P_{2n+1}} + o(x^{2n+1})$$

TERMINOLOGIA: LA FORMULA DI TAYLOR:

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n) \qquad \left(\text{dove } P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i}{i!}\right)$$

viene detto Formula di Taylor "con resto di Peano"

SAREBBE MEGLIO DIRE CHE:

(1) Si chiama RESTO DI TAYLOR (di ordine n, in x_0) l'espressione

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

(2) Quello che abbiamo trovato è una VALUTAZIONE di R_n:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \qquad \left(\text{cioè } R_n(x) = o((x-x_0)^n)\right)$$

Possiamo dire che quella sopra è la VALUTAZIONE DEL RESTO SECONDO PEANO.

SI PUÒ TROVARE UN'ALTRA VALUTAZIONE DI R_n:

TEOREMA ("Formula di Taylor con resto di Lagrange")

Supponiamo $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che f sia derivabile $n+1$ volte. Allora dato $x \in I$ esiste un punto t COMPRESO TRA x_0 E x, tale che:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

è il "termine successivo" con la differenza che $f^{(n+1)}$ è CALCOLATA IN t e non in x_0

DIM: Sia $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Notiamo che (come già visto)

$$R_n(x)^{(i)}(x_0) = 0 \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

Poniamo $g(x) = (x-x_0)^{n+1}$, onde g verifica $g^{(i)}(x_0) = 0$ se $i = 0, \dots, n$

Consideriamo l'espressione

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \qquad \text{(APPLICO CAUCHY)}$$

$$\frac{R_n'(t_1)}{g'(t_1)} = \text{(per un opportuno } t_1 \text{ compreso tra } x \text{ e } x_0)$$

$$\frac{R_n'(t_1) - \overset{= 0}{R_n'(x_0)}}{g'(t_1) - \underset{= 0}{g'(x_0)}} = \text{(riapplico Cauchy)}$$

$$\frac{R_n''(t_2)}{g''(t_2)} \quad \text{(per } t_2 \text{ compreso tra } t_1 \text{ e } x_0 \text{)}$$

$\vdots$

CONTINUO COSÌ $n+1$ VOLTE (perché a ogni passo ho derivate nulle in x_0)

$$\frac{R^{(n+1)}(t)}{g^{(n+1)}(t)} = \text{dove } t \text{ è (alla fine) tra } x \text{ e } x_0$$

deriva $n+1$ volte il pol. P_n che ha grado n

$$\left. \frac{\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(f(x) - P_n(x)\right)}{\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x-x_0)^{n+1}} \right|_{x=t} = \frac{f^{(n+1)}(t) - 0}{(n+1)!}$$

HO DIM.

$$\frac{R_m(x)}{(x-x_0)^{m+1}} = \frac{f^{(m+1)}(t)}{(m+1)!} \iff R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(t)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

COMMENTI (1) Se $m=0$ TROVO

$$R_0(x) = \frac{f'(t)}{1}(x-x_0)$$

$$\| $$

$$f(x) - P_0(x)$$

$$\| $$

$$f(x) - f(x_0)$$

CIOÈ $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(t)$

per t compreso tra x_0 e x

(VECCHIO TEOREMA DI LAGRANGE)

(2) Lagrange $\Rightarrow$ Peano (ma chiede una derivata in più)

IN EFFETTI DA Lagrange si ottiene

$$f(x) = P_m(x) + O((x-x_0)^{m+1})$$

IN EFFETTI

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}$$

t_x che dipende da x

(perché $t = t_x \to x_0$ se $x \to x_0$)

(3) PERÒ IL FATTO CHE CI SIA UN'EGUAGLIANZA È MOLTO MEGLIO DI $o(x^n)$.

VEDIAMO A COSA PUÒ SERVIRE LAGRANGE:

Sia $f(x) = e^x$. So che

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} \qquad (x_0 = 0)$$

PROBLEMA FISSATO $x \neq 0$ SARÀ VERO CHE

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = e^x \quad ??$$

(LIMITE per $n \to \infty$ NON per $x \to x_0$)

MI SERVE VALUTARE

$$e^x - P_n(x) \qquad \left(\text{e fa vedere che } \lim_{n\to\infty} e^x - P_n(x) = 0 \right)$$

Usando Lagrange:

$$e^x - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)\, x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \left(\text{MA } f^{(n+1)}(x) = e^x \right)$$

$$= \frac{e^{t_{n,x}}\, x^{n+1}}{(n+1)!} = (*)$$

dove $t_{n,x}$ (DIPENDE SIA DA x, CHE DA n) è un numero compreso tra 0 e x. L'espressione $(*)$ si può stimare

$$|(*)| \leq \frac{e^{|x|}\, |x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \left(n! \text{ VINCE su } |x|^n \right)$$

DUNQUE $e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \qquad \left(=: \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \text{ LO VEDREMO} \right)$

SE $x \leq 1$ LA CONVERGENZA È MIGLIORE PERCHÉ $|x|^m \leq 1$

IN PARTICOLARE

$$e \overset{\text{``}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \overset{\text{``}}{=} \lim_{m \to \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{m!}\right)$$

MOLTO MIGLIORE COME CONVERGENZA RISPETTO A

$$e = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

ALTRI ESERCIZI (SUI LIMITI) CON TAYLOR

$f(x) = \tan(x)$ CERCHIAMO $P_5(x)$ (in $x_0 = 0$)

1^a possibilità: calcolare $f(0), f'(0) \dots f^{(5)}(0)$ e usare la formula

$\underline{2^a}$ Uso il fatto che

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$$

BISOGNA ANDARE PER PASSI.

PASSO 1

$$f(x) = \frac{x + o(x)}{1 + o(1)} = (x + o(x))(1 + o(1)) = x + o(x) + o(x + o(x)) = x + o(x)$$

PRIMO PEZZO

$$P_1(x) = x$$

AVREI POTUTO ESSERE PIÙ FURBO:

$$f(x) = \frac{x + o(x^2)}{1 + o(x)} = (x + o(x^2))(1 + o(x))^{-1} = (x + o(x^2))(1 - o(x) + o(o(x)))$$

$$\left| (1+y)^{-1} = 1 - y + o(y) \right| \quad = (x + o(x^2))(1 + o(x)) = x + o(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad P_2(x) = x \quad (\text{NON C'È IL TERMINE } x^2)$$

PASSO 2

$$f(x) - P_2(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} - x =$$

$$\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x + \frac{x^3}{2} + o(x^4)}{1 + o(x)} = \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{1 + o(x)} =$$

$$\left(\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)\left(1+o(x)\right) = \frac{x^3}{3}+o(x^4)$$

$$\Rightarrow \quad P_4(x) = x + \frac{x^3}{3} \qquad (\text{NON C'È } x^4)$$

PASSO 3 (ULTIMO)

$$f(x) - P_4(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} - x - \frac{x^3}{3} =$$

$$\frac{\cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \cancel{- x} + \cancel{\frac{x^3}{2}} - \frac{x^5}{24} + o(x^6) \cancel{- \frac{x^3}{3}} + \frac{x^5}{6} + o(x^6)}{1 + o(x)} =$$

$$\left(\left(\frac{1}{120} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6}\right)x^5 + o(x^6)\right)\left(1 + o(x)\right) =$$

$$\frac{1 - 5 + 20}{120} = \frac{16}{120} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$\Rightarrow \quad P_6(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$ cioè

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}\,\sqrt[3]{1-3x} - \cos(\sqrt{5}\,x)}{x - \sin(x)}$$

NOTO CHE DENOMINATORE $= \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

QUESTO SUGGERISCE DI CERCARE LO SVILUPPO DEL NUMERATORE FINO AL TERZO ORDINE

$$\sqrt{1+2x} = 1 + \frac{1}{2}2x - \frac{1}{8}(2x)^2 + \frac{1}{16}(2x)^3 + o(x^3) =$$

$$1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\sqrt[3]{1-3x} = 1 + \frac{-3x}{3} - \frac{(-3x)^2}{9} + 5\frac{(3x)^3}{81} + o(x^3)$$

PRODOTTO TRA I DUE

$$\sqrt{1+2x}\,\sqrt[3]{1-3x} = \left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)\left(1 - x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$1 - \cancel{x} - x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \cancel{x} - x^2 - \cancel{x^3} - \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^3}{2}} + \cancel{\frac{x^3}{2}} + o(x^3) =$$

$$1 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)$$

DUNQUE

$$\frac{\sqrt{1+2x}\,\sqrt[3]{1-3x} - \cos(\sqrt{5}x)}{x - \sin(x)} = \frac{\cancel{1} - \cancel{\frac{5}{2}x^2} + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3) - \cancel{1} + \cancel{\frac{(\sqrt{5}x)^2}{2}} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$= \frac{\frac{5}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} \to \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{5 \cdot 6}{3} = 10$$

BUONE VACANZE