Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 21, 14 dicembre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

FORMULA DI TAYLOR

Siano dati:

$f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo), $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$

VOGLIO TROVARE UN POLINOMIO $P_n(x)$ tale che

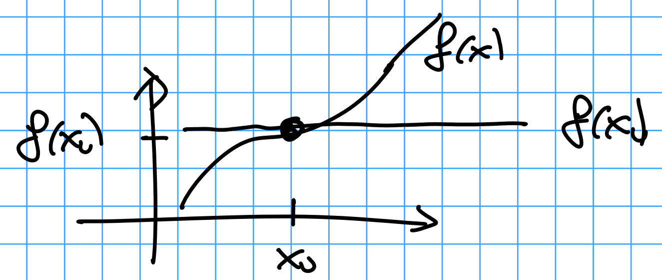
(a) grado $(P_n) \leq n$

(b) $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$

La (b) equivale a:

(b') $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

CASI "BANALI"



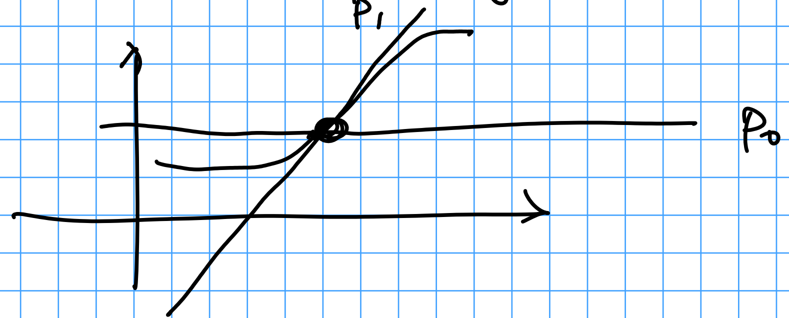
- $n=0$ $\quad P_0(x) = f(x_0)$

- $n=1$ cerco una retta $y = m(x-x_0) + q$

tale che $$f(x) = m(x-x_0) + q + o(x-x_0)$$

È chiaro che

- $q = f(x_0)$ perché, in particolare, $f(x) = q + o(1)$
- $m = f'(x_0)$ (l'abbiamo già visto!)



<u>Def.</u> Una funzione f si dice derivabile due volte se f è derivabile e f' è a sua volta derivabile.
Chiamo derivata seconda la derivata di f' che indicherò con $f'' := (f')'$

Analogamente definisco la derivata n-esima come

$$f^{(n)} = \underbrace{\Big(\Big(\big((f')'\big)' \cdots\Big)'}_{n \text{ volte}}$$

(si scrive anche, per n piccolo, f', f'', f''', f^{iv}, f^{v})
$f^{(1)}$ $f^{(2)}$ $f^{(3)}$ $f^{(4)}$ $f^{(5)}$

CONVENZIONE: $f^{(0)} = f$

RISULTATO PRELIMINARE

Sia $n \in \mathbb{N}$.

Sia $h : I \to \mathbb{R}$, DERIVABILE n volte in I.

Sia $x_0 \in I$. ALLORA SONO EQUIVALENTI:

(a) $$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \qquad \left(\text{cioè } h(x) = o(x-x_0)^n\right)$$

(b) $$h(x_0) = h'(x_0) = h''(x_0) = \dots = h^{(n)}(x_0) = 0$$

ANZI VALE UN FATTO LEGGERMENTE PIÙ GENERALE

(a') $$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^n} = \ell \in \mathbb{R}$$

$\Uparrow$

(b') $\quad h(x_0) = h'(x_0) = \dots = h^{(m-1)}(x_0) = 0 \quad$ e

$$\frac{h^{(m)}(x_0)}{m!} = \ell$$

DIM. Farò vedere che (a') $\Leftrightarrow$ (b'). Comincio da

(b') $\Rightarrow$ (a'). Quindi suppongo che $h(x_0) = \dots = h^{(n-1)}(x_0) = 0$

NOTIAMO CHE $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^m}$ è una forma $\frac{0}{0}$

(perché $h(x_0) = 0$) : POSSO APPLICARE DE L'HÔPITAL

e passare a $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{h'(x)}{m(x-x_0)^{m-1}}$ (ANCORA $\frac{0}{0}$, perché $\underset{0}{h'(x_0)}$)

Riapplico de l'Hôpital ; passo a $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{h''(x)}{m(m-1)(x-x_0)^{m-2}}$

LO POSSO ITERARE FINO A

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h^{(m-1)}(x)}{m!\,(x-x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{h^{(n-1)}(x) - h^{(n-1)}(x_0)}{m!\,(x-x_0)} =$$

$$\frac{h^{(m)}(x_0)}{m!}$$

QUINDI HO DIMOSTRATO CHE $\left(\text{se } h(x_0) = \cdots = h^{(n-1)}(x_0) = 0 \right)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

<u>VICEVERSA</u> $\left((a') \Rightarrow (b') \right)$ Supponiamo che

esista $\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^n}$. VOGLIO DIM. CHE

$$0 = h(x_0) = h'(x_0) = \quad = h^{(m-1)}(x_0)$$

Se non fosse vero ci sarebbe $0 \le k \le m-1$

tale che $h^{(k)}(x_0) \neq 0$ - posso anche suppore che

$$h(x_0) = \quad = h^{(k-1)}(x_0) = 0$$

(scelgo come k la prima derivata non nulla in x_0

- se tutte fossero $\neq 0$ prendo $k=0$)

RIFACENDO I CALCOLI DI PRIMA TROVO

$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^K} = \frac{h^{(K)}(x_0)}{K!} \neq 0$$

MA D'ALTRA PARTE

$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^K} = \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^m} (x-x_0)^{m-K} =$$

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^m}}_{=0 \text{ per ipotesi}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to x_0} (x-x_0)^{m-K}}_{\substack{=0 \text{ se } m<K \\ =1 \text{ se } m=K}} = 0 \qquad \underline{\text{ASSURDO}}$$

DUNQUE NON CI PUÒ ESSERE UN TALE K o cioè tutte le derivate fino alla m-1 esimo sono zero

A questo punto si ripetono i calcoli e si trova

$$\ell = \frac{h^{(m)}}{m!}$$

<u>DUNQUE</u> $h(x) = o(x-x_0)^m \iff h(x_0) = h'(x_0) = \dots = h^{(n)}(x_0) = 0$

(se h è derivabile n volte)

D'ORA IN POI SUPPONGO CHE f SIA DERIVABILE m VOLTE

TORNIAMO ALLA RICERCA DI P_n tale che :

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

UN TALE POLINOMIO DEVE VERIFICARE : posto $h(x) = f(x) - P_n(x)$

h HA TUTTE LE DERIVATE NULLE IN $x = x_0$, fino all'n-esimo

CIOE' ⊛ $\boxed{P_n^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, n}$

DUNQUE PER TROVARE P_n devo trovare un polinomio che verifichi ⊛

TEOREMA Sia n intero. Se assegno, ad arbitrio

$c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, esiste uno e uno solo polinomio $P(x)$ di grado $\leq n$, tale che

$$P^{(i)}(x_0) = c_i \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

TALE POLINOMIO $P(x)$ È DATO DALLA FORMULA

$$P(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \frac{c_2}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{c_n}{n!}(x-x_0)^n$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{i!}(x-x_0)^i$$

<u>DIM.</u> Un polinomio generico di grado $\leq n$ si scrive come $P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$

(si parte dalla forma $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$

TROVO $a_0 \dots a_n$ in modo che valga la rappresentazione sopra)

ALLORA $\boxed{P(x_0) = a_0}$. POI ..

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots + n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$\boxed{P'(x_0) = a_1}$ DERIVIAMO DI NUOVO:

$$P''(x) = 2a_2 + \overbrace{3 \cdot 2}^{6} a_3 (x-x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$\boxed{P''(x_0) = 2a_2}$ ITERANDO TROVO

$P^{(i)}_{(x)} = i!\, a_i$ + potenze di esponente ≥ 1

$$\boxed{P^{(i)}(x_0) = i!\, a_i} \qquad i = 0 \dots n$$

DUNQUE SE $P^{(i)}(x_0) = c_i$ deve essere

$$\boxed{a_i = \frac{c_i}{i!}}$$

che è quello che volevo

$$\Rightarrow P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{i!} (x - x_0)^i$$

QUINDI P è univocamente determinato — è poi ovvio che il P trovato verifica le condizioni

---

IN DEFINITIVA HO DIMOSTRATO CHE

TEOREMA Se f è derivabile n volte esiste uno e un solo polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \quad \left(\text{cioè } f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)\right)$$

Tale P_n è dato dalla formula :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n$$

(Basta mettere insieme quanto detto prima)

P_n SI CHIAMA "Polinomio di Taylor" per f, di ordine n, nel punto x_0

Tipicamente $x_0 = 0$ (in questo caso P_n si chiama anche polinomio di Mc Laurin)

ESEMPI (TUTTI IMPORTANTI - DA SAPERE)

$x_0 = 0$ (in tutto quanto segue $\Rightarrow$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

(1) $f(x) = e^x$

$f(0) = e^0 = 1$; $f'(x) = e^x$, $f'(0) = e^0 = 1$

$$f^{(i)}(x) = e^x \qquad \boxed{f^{(i)}(0) = 1}$$

DUNQUE, se $f(x) = e^x$ $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

e dunque ($\forall n \in \mathbb{N}$)

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + o(x^n)$$

---

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = (1+x)^\alpha$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(i)}(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}_{i \text{ fattori}}(1+x)^{\alpha-i}$$

$$f^{(i)}(0) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-i+1)}_{i \text{ fattori}}$$

$$\Rightarrow \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+i)}{i!} x^i$$

NOTIAMO CHE SE $\alpha = k$ INTERO il coeff. i-esimo

è
$$\frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i} = \binom{k}{i} \quad \Bigg(= \underbrace{\frac{k!}{(k-i)!}}_{\text{NUMERATORE}} \frac{1}{i!}$$

per $i \le k$

mentre fa zero se $i > k$ (nel numeratore compare

$k-k=0 \Rightarrow$ viene zero)

CONVIENE ALLORA INTRODURRE LA SCRITTURA

$$\binom{\alpha}{i} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} \qquad \text{per ogni } i \in \mathbb{N}$$

CON QUESTA NOTAZIONE:

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = \sum_{i=0}^{n} \binom{\alpha}{i} x^{i} + o(x^{n})}$$

NOTA CHE, SE $\alpha = k \in \mathbb{N}$ si ha

$$(1+x)^K = \sum_{i=0}^{m} \binom{K}{i} x^i + \underbrace{o(x^m)}_{\text{qui ci sono le potenze } > m \text{ del binomio di Newton}} \quad \text{se } m \leq K$$

MENTRE SE $m > K$

$$(1+x)^K = \sum_{i=0}^{K} \binom{K}{i} x^i + 0$$

(il polinomio di Taylor coincide con la funzione)

CASO $\alpha = -1$

$$\binom{-1}{i} = \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-i+1)}{i!} =$$

$$(\text{letto a rovescio}) = \frac{(-1)(i)(-1)(i-1)\cdots(-1)\,1}{i!} =$$

$$(-1)^n \frac{i!}{i!} = (-1)^n$$

DUNQUE

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i + o(x^n) =$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

NOTA CHE, SE METTO $-x$ al post di x, trovo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots x^n + o(x^n)$$

COSA CHE SAPEVO GIÀ, DATO CHE

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$ e quindi

$$o(x^n) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$