Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 20, 10 dicembre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

STUDI DI FUNZIONE

Data una $f(x)$, per studiarne il grafico dobbiamo:

(A) Stabilire chi è il dominio di f — si tratta di stabilire qual è l'insieme "più grande" in cui ha senso l'espressione di $f(x)$. Chiamiamo A questo insieme.

(B) Trovare i limiti "agli estremi" — per tutti i punti x_0, di accumulazione per A, si cerca $\lim_{x \to x_0} f(x)$ — se $x_0 \in A$ questo significa chiedersi se f è continua in x_0 — nei punti $x_0 \notin A$ questo può servire a prolungare f o a vedere cosa fa $f(x)$ quando $x \to x_0$

Se poi $\pm\infty$ sono di accumulazione per A può essere interessante trovare gli eventuali ASINTOTI OBLIQUI

(C) Studio del segno di $f(x)$ — QUANDO QUESTO SI POSSA FARE

(D) Studio della monotonia tramite il segno di f' — MASSIMI E MINIMI relativi / assoluti

- Studio dei limiti di $f'(\bar{x})$ nei punti in cui f' non esiste (TANGENTI VERTICALI ? SPIGOLI ?)

(E) STUDIO DI CONCAVITÀ / CONVESSITÀ, mediante il segno della derivata f'' (DA VEDERE PROSSIMAMENTE).

ESEMPIO $\quad f(x) = x^x$

(A) Per quali x ha senso fare x^x ??

PER CONVENZIONE l'espressione a^b (se non sappiamo nulla di b) si fa solo per $a>0$ ed è definita da $a^b = e^{b\ln(a)}$

DUNQUE x^x ha come "dominio naturale" $A =]0, +\infty[= \{x > 0\}$ e comunque

$$x^x = e^{x\ln(x)}$$

(B) x^x è sicuramente CONTINUA su A dato che si ottiene dalle funzioni e^x, $\ln(x)$, x che sono continue

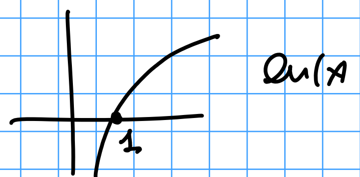
Oltre ai punti di A si può fare il limite per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$.

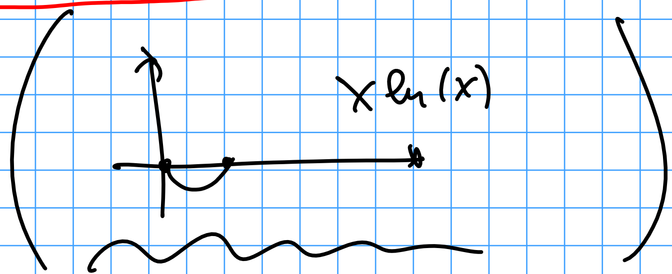
$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)}$$

Facciamo $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ (Forma $0\cdot(-\infty)$, però è tra i limiti notevoli)

ANZI TROVO 0^-, dato che per $x < 1$ $\underline{\ln(x) < 0} \Rightarrow \underline{x\ln(x) < 0}$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{0^-} = 1^- \ (*)}$ (tende a 1 ma ci arriva da valori <1)





(*) DUNQUE SE PONGO $f(0)=1$ f risulta continua in 0

A $+\infty$ viene $\boxed{\lim_{x\to +\infty} e^{x\ln(x)} = e^{+\infty} = +\infty}$

(C) $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$ (dato che $e^x > 0 \ \forall x$)

(D) Calcoliamo $f'(x) = \frac{d}{dx} e^{x\ln(x)} = e^{x\ln(x)}(x\ln(x))' =$

$$x^x\left(1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln(x)+1) \quad (\text{se } x>0)$$

SEGNO DI $f'(x)$? Dato che $x^x > 0$ devo guardare il segno di $1+\ln(x)$:

$$1+\ln(x) > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > e^{-1}$$

conto il fatto che e^x è strett. crescente

DUNQUE $f'(x) > 0$ se $x > \frac{1}{e}$ / $f'(x) < 0$ se $0 < x < \frac{1}{e}$

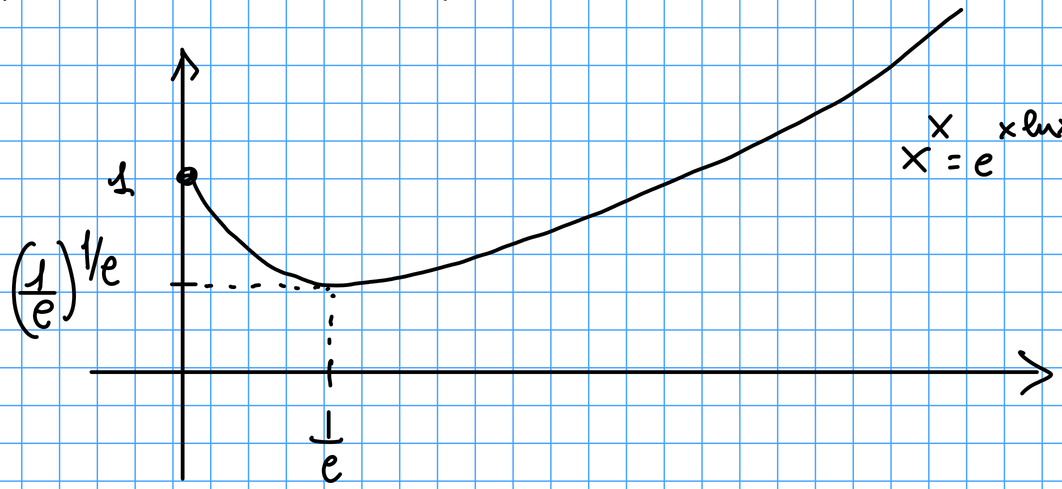
$f'(x) = 0$ se $x = \frac{1}{e}$

NE SEGUE f CRESCENTE SU $[1/e, +\infty]$

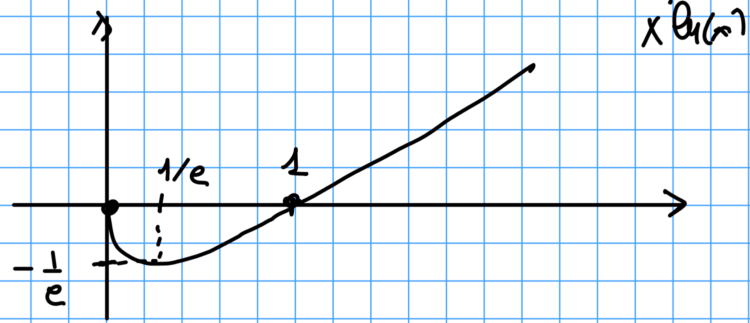
f DECRESCENTE SU $]0, 1/e]$

($\Rightarrow \frac{1}{e}$ è pto di MINIMO)

POSSIAMO TRACCIARE UN GRAFICO QUALITATIVO



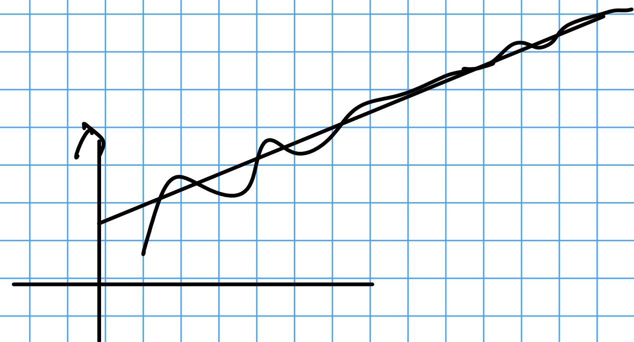
$x^x = e^{x \ln x}$



ALTRE QUESTIONI CHE SI POSSONO INDAGARE:

<u>ASINTOTI OBLIQUI</u> : Se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ posso chiedermi se c'è una retta $y = mx + q$ tale che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx - q \right) = 0$$



Se questa retta esiste la chiamo asintoto a $+\infty$

(STESSO DISCORSO A $-\infty$) . COME TROVO TALI m e q ?

Se m e q esistono, è chiaro che

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - m$$

cioè $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ e poi $q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$

(se tali limiti esistono $\Rightarrow$ esiste asintoto / se uno / entrambi $\nexists \Rightarrow \nexists$ asint.)

NEL NOSTRO CASO, $f(x) = x^x$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{x}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} x^{x-1} = \lim_{x\to+\infty} e^{(x-1)\ln(x)} = e^{+\infty} = +\infty$$

NON C'È ASINTOTO A $+\infty$

- EVENTUALE DERIVATA IN $x=0$ (avendo posto $f(0)=1$)

PROVIAMO A CALCOLARE

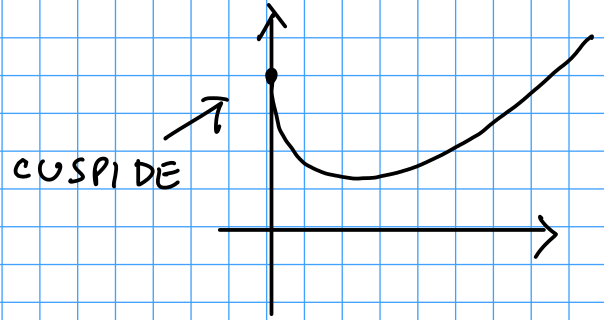
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x} =$$

(ricordiamo che $e^y = 1 + y + o(y)$)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 + x\ln x + o(x\ln(x)) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x) + o(x\ln(x))}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) + o(\ln(x)) = -\infty$$ DERIVATA $-\infty$

TANGENTE VERTICALE



– SI PUÒ ANCHE STUDIARE IL SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA

$$f'' = (f')' :$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\, x^x\left(1 + \ln(x)\right) = \underbrace{x^x\left(1+\ln(x)\right)}_{(x^x)'} \cdot \left(1 + \ln(x)\right) +$$

$$x^x \cdot \frac{1}{x} = x^x\left[\left(1+\ln(x)\right)^2 + 1/x\right] > 0 \quad \forall x$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO : f È CONVESSA (NE RIPARLEREMO)

ALTRO ESEMPIO

$$f(x) = \frac{|2x-3|}{x^2-3x+2}$$

(A) DOMINIO $= \{x : x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

DUNQUE $\{x \neq 2,\ x \neq 1\} = A$

(B) f è continua in A (per motivi ovvi)

BISOGNA POI FARE I LIMITI A $\pm\infty$, 2^+, 2^-, 1^+, 1^-

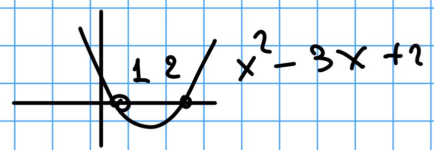
- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{|2x-3|}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|2x|\,|1+o(1)|}{x^2(1+o(1))} =$$

perché $|x| = -x$ quando $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|2x|}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2}{x} = \boxed{0^+}$$

- Analogamente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dots = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \boxed{0^+}$

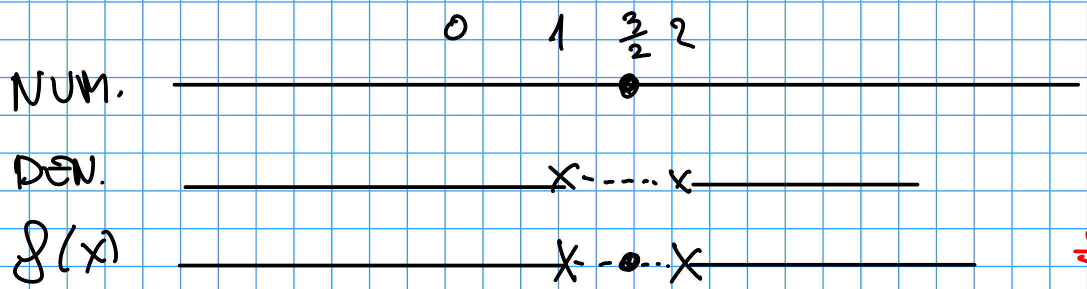
NOTIAMO CHE x^2-3x+2 $\begin{cases} >0 & \text{se } x<1 \text{ o } x>2 \\ <0 & \text{se } 1<x<2 \end{cases}$



$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{ll} \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty, & \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty, & \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty \end{array}}$ (GUARDANDO I SEGNI)

SEGNO: NUMERATORE >0 se $x \neq 0$, $=0$ se $x=0$

DENOMINATORE: VISTO PRIMA



≠ segno

DERIVATA E MONOTONIA

$f'(x)$ esiste se $x \neq 1, 2$ e $\underline{x \neq 0}$ (A CAUSA DEL MODULO)

per fare il calcolo di f dove distinguere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-3}{x^2-3x+2} & \text{se } 2x-3>0 \quad (x > 3/2) \\[2ex] \dfrac{-2x+3}{x^2-3x+2} & \text{se } 2x-3<0 \quad (x < 3/2) \end{cases}$$

oppure posso usare il fatto che $\frac{d}{dx}|x| = \text{segno}(x)$ se $x \neq 0$

Con questo sistema posso scrivere

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}|2x-3|\,(x^2-3x+2) - |2x-3|(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} =$$

$$\frac{\text{segno}(2x-3)\cdot 2\cdot(x^2-3x+2) - \text{segno}(2x-3)\,(2x-3)\cdot(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} =$$

$(x \neq 3/2)$

$$\text{segno}(2x-3)\cdot\frac{2(x^2-3x+2)-(4x^2-12x+9)}{(x^2-3x+2)^2} =$$

$$\text{segno}(2x-3)\,\frac{-2x^2+6x-5}{(x^2-3x+2)^2} = f'(x)$$

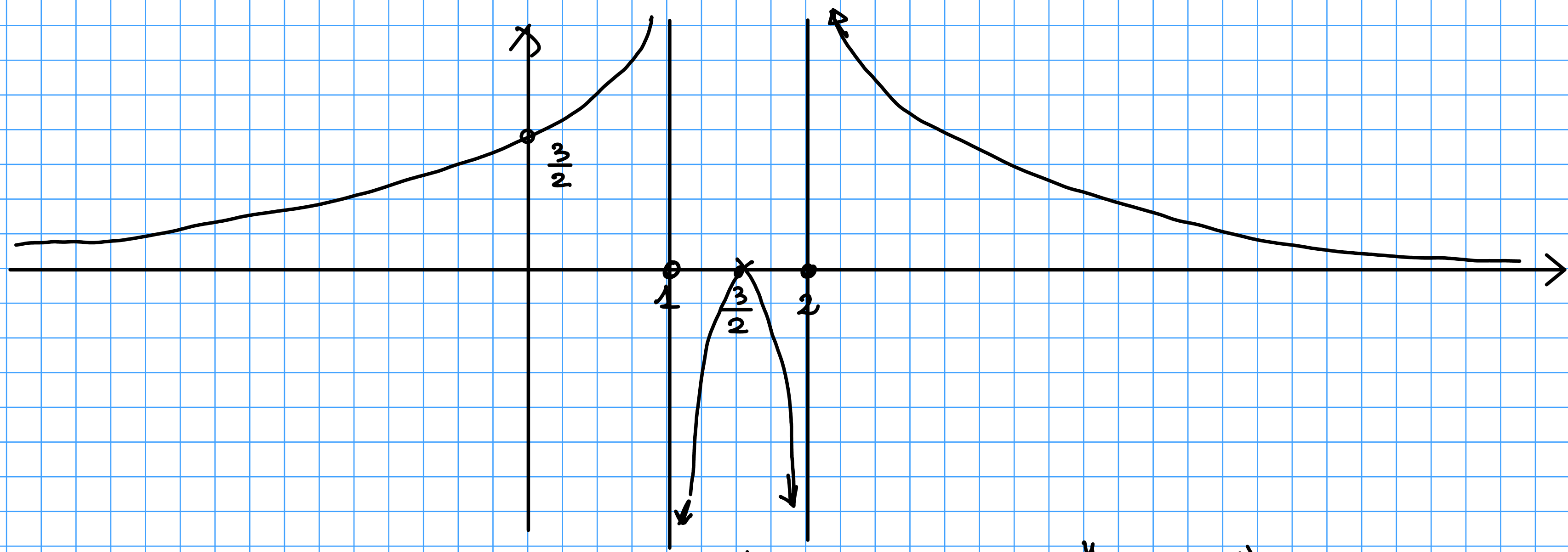
Per studiare il segno di f' serve il segno di $-2x^2+6x-5$

$\Delta = 36-40 < 0 \Rightarrow$ sempre < 0

DUNQUE $f'(x) > 0$ se $x < \frac{3}{2}$

$f'(x) < 0$ se $x > \frac{3}{2}$ $\quad (x \neq 1, 2)$

$f(0) = \frac{3}{2}$



IN $X = \frac{3}{2}$ ci sono "derivata destra" e "derivata sinistra" FINITE

MA DIVERSE TRA LO $\longrightarrow$ PUNTO ANGOLOSO

(se si fa il limite da destra/sinistra di $f'(x)$ si trovano

due valori finiti, non nulli, e opposti tra loro)

TEOREMI DI DE L'HÔPITAL

Utili al calcolo di limiti che si trovano nella forma $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema Siano f, g definite in $]a, b[$ (a/b anche ∞)

derivabili in $]a, b[$ e tali che

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 \qquad \left(\text{oppure} \quad \lim_{x \to a^+} |f(x)| = +\infty \right.$$

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = 0 \qquad \left. \lim_{x \to a^+} |g(x)| = +\infty \right)$$

Supponiamo anche di sapere che $g'(x) \neq 0$ in $]a, b[$ ed

esiste $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ $\quad (\ell \in \overline{\mathbb{R}})$

ALLORA

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

(Stesso discorso se $x \to b^-$ e dunque se $x \to x_0$ sia da dx che da sx)

DIM. Dimostriamo solo il caso $a \in \mathbb{R}$, e la forma è $0/0$

Se $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ per $x \to a^-$ posso estendere f e g nel punto $x=a$, mettendole zero.

IN QUESTO MODO $(f(a) = g(a) = 0)$ f e g SONO CONTINUE IN a (e derivabili in $]a,b[$)

Per dimostrare che $\frac{f(x)}{g(x)} \to \ell$ quando $x \to a^-$ PRENDO UNA (qualunque) SUCCESSIONE x_n in $]a,b[$ con $x_n \to a^+$

E CALCOLO $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$. Dato che f e g sono continue in $[a, x_n]$ e derivabili in $]a, x_n[$, posso applicare il teorema di Cauchy:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - \overbrace{f(a)}^{=0}}{g(x_n) - \underbrace{g(a)}_{=0}} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)}$$

per un opportuno t_n compreso tra a e x_n

Dato che $a < t_n < x_n$, per i carabinieri, $t_n \to a$

Dato che, per ipotesi, $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$ quando $x \to a^-$ $\Longrightarrow$

$$\frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} \to \ell \quad \text{DUNQUE}$$

$$\boxed{\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \ell \quad \text{per qualunque succ. } x_n \to 0}$$

HO QUINDI DIMOSTRATO CHE $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ #

ESEMPI

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$$

Se uso i limiti notevoli visti fino ad ora posso scrivere

$\sin(x) = x + o(x) \Rightarrow$

$$\frac{\sin(x) - x}{x^3} = \frac{o(x)}{x^3} \quad \text{NON SO COSA FACCIA}$$

$$\frac{\sin(x)}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = +\infty - \infty \quad ?!$$

USO DE L'HÔPITAL:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{3x^2} \overset{*}{=} -\frac{1}{6}$$

perché $\lim \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (LIMITE NOTEVOLE)

- SE NON MI RICORDO IL LIM. NOT. continuo a usare de l'Hôpital

$$* = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{6x} = (\text{de } H) \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{6} = -\frac{1}{6}$$

DUNQUE $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$ che si può esprimere dicendo

$$\sin(x) - x \simeq -\frac{x^3}{6} \quad (\text{in } x\to 0) \qquad \text{O ANCHE}$$

$$\sin(x) = x \underbrace{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}_{o(x)}$$

(INFORMAZIONE PIÙ FINE DI
$\sin(x) = x + o(x)$)

$$-\quad \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{x^2 \sin(2x)}\right] =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - x\sin(2x) - \ln(1+2x)}{x^2 \sin(2x)} = \text{(provo con Hôpital)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x) - \sin(2x) - x\, 2\cos(2x) - \frac{2}{1+2x}}{2x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)\left[2(1-x)\cos(2x) - \sin(2x)\right] - 2}{(1+2x)\left[2x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x)\right]} =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)\left[2(1-x)\cos(2x) - \sin(2x)\right] - 2}{x\sin(2x) + x^2\cos(2x)} = (H)$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{2\left[2(1-x)\cos(2x) - \sin(2x)\right] + (1+2x)\left[-2\cos(2x) - 2(1-x)\sin(2x) - 2\cos(2x)\right]}{\sin(2x) + 2x\cos(2x) + 2x\cos(2x) - 2x^2\sin(2x)}$$

... TROPPO LUNGO ...

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1+2x} - 2}{2x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2}-\cancel{2}-4x}{2x\,(1+2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{1+2x} = -2$$

DUNQUE $\ln(1+2x) - 2x \simeq -2x^2 \iff \ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + o(x^2)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x + 2x^2}{x^3} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1+2x} - 2 + 4x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2} - \cancel{2} - \cancel{4x} + \cancel{4x} + 8x^2}{3x^2\,(1+2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{8}{3}\,\frac{1}{1+2x} = \frac{8}{3}$$

ALLORA

$\ln(1+2x) - 2x + 2x^2 \simeq \frac{8}{3}x^3$ cioè

$$\boxed{\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)}$$

INOLTRE HO TROVATO PRIMA

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$ $\Rightarrow \sin(2x) = 2x - \frac{8}{6}x^3 + o(x^3)$

TORNIAMO AL LIMITE "COMPLICATO":

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{x^2 \sin(2x)} =$$

$$\frac{\sin(2x) - x\sin(2x) - \ln(1+2x)}{\underbrace{x^2 \sin(2x)}_{x^2\left(2x+o(2x)\right) = 2x^3\left(1+o(1)\right) = 2x^3+o(x^3)}} =$$

USO LE FORMULE TROVATE

$$\frac{\cancel{2x} - \frac{8}{6}x^3 + o(x^3) - x\left(\cancel{2x} - \frac{8}{6}x^3 + o(x^3)\right) - \cancel{2x} + \cancel{2x^2} - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)}{2x^3 + o(x^3)}$$

$$\frac{-\frac{8}{6}x^3 + \underbrace{\frac{8}{6}x^4}_{=o(x^3)} + \underbrace{o(x^4)}_{=o(x^3)} - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)}{2x^3 + o(x^3)} = \frac{-4x^3 + o(x^3)}{2x^3 + o(x^3)} \to -2$$

$\frac{8}{6}x^4 + \dots$

$$-\frac{8}{6} - \frac{8}{3} = \frac{-8-16}{6} = \frac{-24}{6} = -4$$