Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 19, 7 dicembre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

LEZIONE DI RECUPERO:

LUNEDÌ 10, ore 12.30 – 15.30,

AULA C.01

LEGAME TRA PTI DI MAX / MIN (RELATIVO) E DERIVATA $\Rightarrow$ TEOREMA DI FERMAT

DEFINIZIONE $f : A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subset \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$

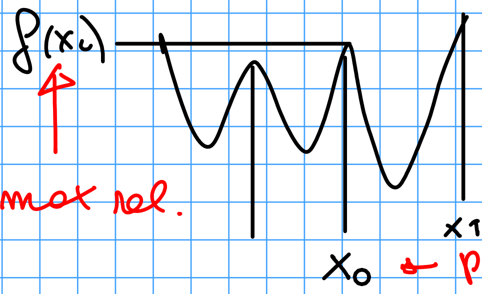
si dice punto di massimo (minimo) relativo se esiste $\delta > 0$ tale che:

per ogni x con $x \in A$, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, si ha $f(x) \leq f(x_0)$

$(f(x) \geq f(x_0))$

SI PUÒ ANCHE DIRE CHE x_0 pto di max (min) relativo se la proprietà $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ è vera per gli $x \in A$ vicini a x_0

Si dice in questo caso che $f(x_0)$ è un massimo (minimo) relativo



Con questa terminologia il max (min) si chiama anche massimo (minimo) assoluto.

TEOREMA (di Fermat) Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$,

(a) $x_0 \in\,]a,b[$ (x_0 INTERNO ALL'INTERVALLO $[a,b]$),

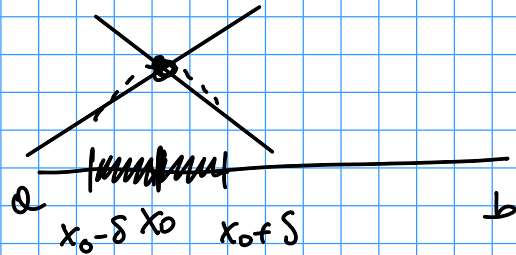
(b) x_0 punto di massimo o di minimo relativo,

(c) f derivabile in x_0

ALLORA $f'(x_0)=0$ (x_0 è punto stazionario o punto critico per f)

DIM. Prendiamo $\delta>0$ tale che $]x_0-\delta, x_0+\delta[\, \subset [a,b]$
(lo posso fare perché $x_0\in\,]a,b[$) e tale che

$f(x) \leq f(x_0)$ per tutte le x in $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ (CASO DI x_0 pto di max)



Prendiamo i rapporti incrementali "centrati" in x_0: per $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ e $x \neq x_0$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

NUMERATORE ≤ 0 $\forall x$ (x_0 p. max)

DENOMINATORE CAMBIA SEGNO QUANDO $x > x_0$ o $x < x_0$ $\Rightarrow$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-f(x_0)} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x_0 < x < x_0+\delta \\ \geq 0 & \text{se } x_0-\delta < x < x_0 \end{cases}$$

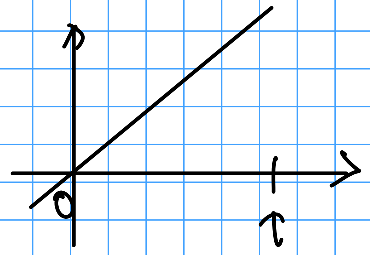
Dato che f è derivabile in x_0 posso fare il limite per $x \to x_0$

$\Rightarrow$

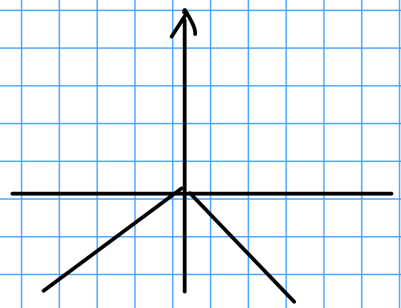
$$f'(x_0) = \begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \\ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

\#

ATTENZIONE: SE UNA TRA a) b) c) NON VALE IL TEOR. PUÒ NON ESSERE VERO



$f(x) = x$ su $[0,1]$ HA $x_0 = 1$ come pto di max, ma $f'_-(1) \neq 0$

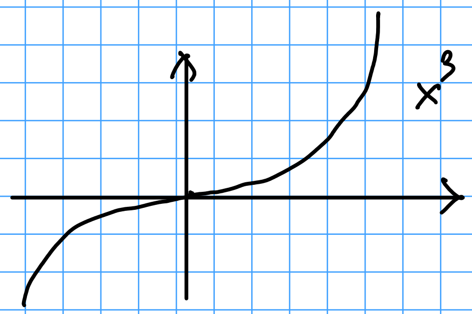


$f(x) = -|x|$ HA $x_0 = 0$ come pto di max, ma non esiste $f'(0)$

ATTENZIONE: NON VALE IL VICEVERSA: non tutti i pti stazionari sono pti di max/min relativo:

come controesempio si pensi a $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$. ALLORA $x_0 = 0$ è punto stazionario



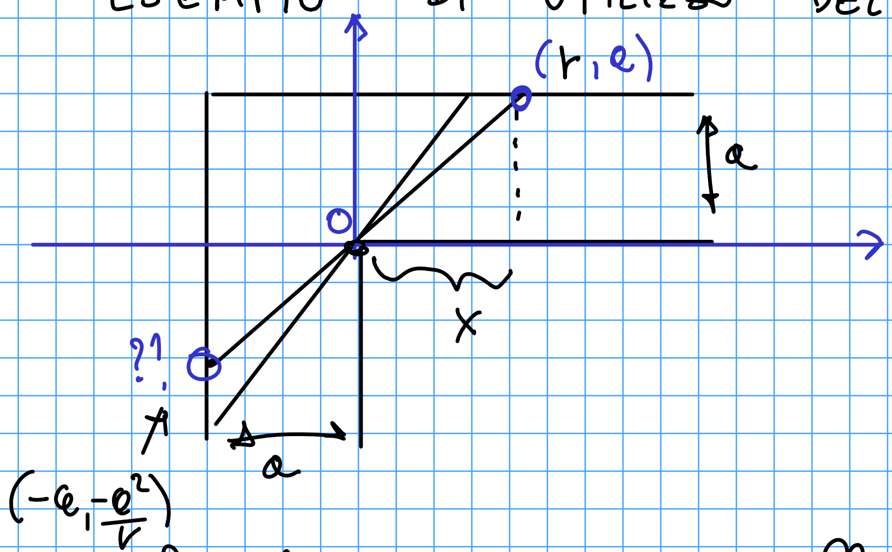
MA ZERO NON È NÉ MAX NÉ MIN per f.

(NELL'ORIGINE LA TANGENTE È ORIZZONTALE !!)

CONSEGUENZA DI FERMAT: Se voglio trovare i pti di max o di min per f DEVO CERCARE TRA:

- I PUNTI STAZIONARI
- I PUNTI IN CUI f NON È DERIVABILE
- GLI ESTREMI DELL'INTERVALLO

ESEMPIO DI UTILIZZO DEL TEOREMA



qual è la lunghezza massima di una trave che posso fare passare per il corridoio di larghezza a

un estremo è (r, a)

Prendiamo r come nella figura. Dato r, cerchiamo le coordinate dell'altro estremo sulla retta che passa per l'origine.

La retta per $(0, 0)$ e (r, a) è data da

$y = \frac{a}{r} x$

Tale retta in $x = -a$ passa per $\left(-a, -\frac{a^2}{r}\right)$

Troviamo la distanza tra (r, a) e $\left(-a, -\frac{a^2}{r}\right)$

$$\to \sqrt{(r+a)^2 + \left(a + \frac{a^2}{r}\right)^2}$$

TOGLIAMO LA RADICE (TANTO I MAX/MIN SONO GLI STESSI, DATO CHE LA RADICE È UNA FUNZ CRESCENTE)

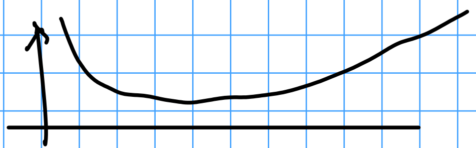
$$f(r) = (r+a)^2 + a^2\left(1 + \frac{a}{r}\right)^2$$

LA LUNGHEZZA MASSIMA CHE PASSA PER IL CORRIDOIO È il valore MINIMO DI $f(r)$ $\quad r > 0$

NOTIAMO CHE

(1) $f(r)$ è continua su $]0, +\infty[$

(2) $\lim_{r \to \infty} f(r) = +\infty \qquad \lim_{r \to 0^+} f(r) = +\infty$



PER UNA "VERSIONE GENERALIZZATA" DI WEIERSTRASS

f HA MINIMO (come si dimostra??)

(3) Per Fermat, tale minimo si realizza in un punto r_0 tale che $f'(r_0) = 0$ $\left(\frac{d}{dr}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \right)$

CALCOLIAMO $f'(r) = 2(r+a) + a^2\, 2\left(1+\frac{a}{r}\right)\cdot\left(-\frac{a}{r^2}\right)$

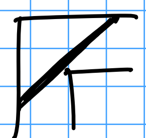
CERCHIAMO LE SOL. DI $f'(r) = 0 \iff$

$$\frac{a^3}{r^2}\left(1+\frac{a}{r}\right) = r + a \iff$$

$$a^3 \cancel{(r+a)} = \cancel{(r+a)}\, r^3 \iff r^3 = a^3$$

$$\iff r = a$$

DUNQUE IL PTO DI MINIMO (CHE DEVE ESISTERE) È $r_0 = A$



→ POSIZIONE PEGGIORE

LUNGHEZZA MAX = $\sqrt{2}\, 2a$

TEOREMI PER LE FUNZIONI DERIVABILI SU $[a\ b]$

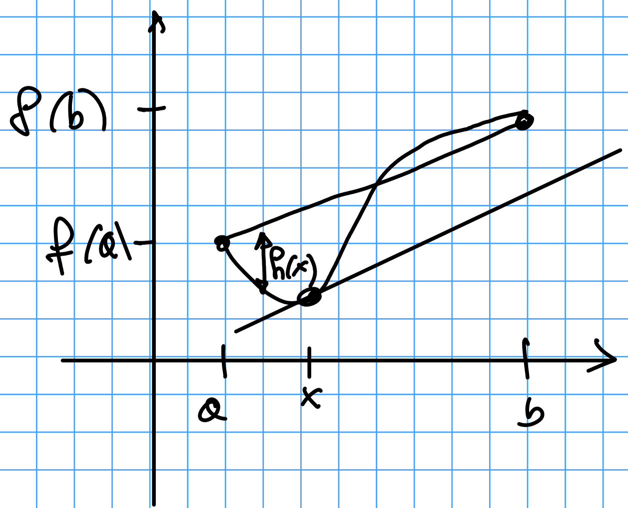
(Rolle / Cauchy / Lagrange)

tre teoremi che si posso ricondurre l'uno all'altro

TEOREMA DI LAGRANGE Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$.

Allora esiste un punto x in $]a,b[$ tale che

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



INTEPRETAZIONE GEOMETRICA:
c'è un punto $(x, f(x))$ in cui la tangente al grafico di f è PARALLELA alla retta PQ

$(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

DIM. Consideriamo la funzione

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

NOTA: Il grafico di g è la retta per $(a, f(a))$, $(b, f(b))$

basta notare che $g(a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = f(a)$

$$g(b) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}(\cancel{b-a}) = f(b)$$

e poniamo $h(x) := f(x) - g(x)$. Cerco x come punto stazionario di h, ANZI come pto di max o min di h. IN EFFETTI SE TROVO x per cui

$$h'(x) = 0 \iff f'(x) - g'(x) = 0 \iff f'(x) = g'(x) \left(= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right)$$

e quindi un tale x verifica la tesi del teorema.

PER WEIERSTRASS SO che esistono x_1 e x_2 tali che

$(*)\qquad h(x_1) \leq h(x) \leq h(x_2) \qquad \forall x \in [a,b]$

CI SONO DUE POSSIBILITÀ:

(1) UNO TRA x_1 e x_2 appartiene ad $]a,b[$; in questo caso posso usare Fermat (a x_1 o a x_2) e in quel punto $h' = 0 \Rightarrow$ FINE

(2) ENTRAMBI x_1 e x_2 SONO IN $\{a,b\}$ (SONO ESTREMI DEGLI INTERVALLO). MA ALLORA

$$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = 0 \;/\; h(x_2) = \dots = 0$$

MA DA $(*)$ si ricava $0 \leq h(x) \leq 0 \Rightarrow h(x) = 0 \;\forall x$

$\Rightarrow h'(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow$ LA TESI VALE $\forall x$

IN OGNI CASO ALMENO IN UN PUNTO $h'(x) = 0$ FINE

CONSEGUENZE DI LAGRANGE

TEOREMA DI ROLLE Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, se $f(b) = f(a)$

$\Rightarrow$ ESISTE $x \in]a,b[$ in cui $f'(x) = 0$

DIM. (Segue subito da Lagrange!

TEOREMA (DERIVATA E MONOTONIA). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ derivabile in $]a,b[$.

SONO EQUIVALENTI

(a) f è crescente su $[a,b]$ (decrescente ...)

(b) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$ $\quad$ ($f'(x) \leq 0$ ...)

DIM Bisogna dim. che (a) $\Rightarrow$ (b) e che (b) $\Rightarrow$ (a)

(a) $\Rightarrow$ (b) è conseguenza della definizione di derivata.

Infatti se f è crescente $\Longleftrightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

per ogni x, x_0 (con $x \neq x_0$). Se passo al limite per $x \to x_0$ ottengo $f'(x_0) \geq 0 \quad \forall x_0$

(b) $\Rightarrow$ (a) è conseguenza di Lagrange (NON È INVECE UNA SEMPLICE CONSEGUENZA DELLA DEF. DI DERIVATA)

INFATTI prendiamo x_1 e x_2 con $a \leq x_1 < x_2 \leq b$

usiamo Lagrange sull'intervallo $[x_1, x_2]$ $\Rightarrow$ trovo $x \in]x_1, x_2[$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x) \quad (\geq 0 \text{ per ipotesi})$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

Dato che x_1 e x_2 sono arbitrari $\Rightarrow f$ è crescente

---

NELLO STESSO MODO VEDO CHE

TEOREMA Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cont. e der. in $]a, b[$ allora

$$f \text{ è costante} \iff f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$$

La parte non ovvia è la "$\Leftarrow$"

ATTENZIONE: Crescente va inteso in senso debole; le funzioni costanti sono sia crescenti che decrescenti

---

Potrei studiare il collegamento tra:

(a1) f strettamente crescente su $[a,b]$

(b1) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a,b[$

IN QUESTO CASO

$(b_1) \Rightarrow (a_1)$ STESSA DIMOSTRAZIONE

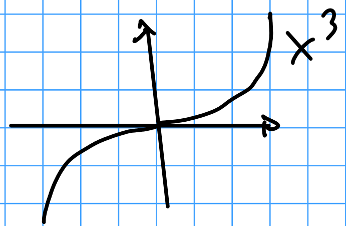
(derivata $>0 \Rightarrow f$ strett. crescente)

MA $(a_1) \not\Rightarrow (b_1)$; infatti se prendo

$f(x) = x^3$ trovo una funzione strettamente crescente

ma che non ha $f'(x) > 0 \ \forall x$ — infatti $f'(0) = 0$

$\left(f'(x) = 3x^2 \ , \ f'(0) = 0 \right)$



TEOREMA DI CAUCHY

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

continue su $[a,b]$, derivabili su $]a,b[$. Inoltre

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$.

Allora $g(b) \neq g(a)$ ed esiste $x \in]a,b[$ con

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(se $g(x)=x$ ritrovo il teorema di Lagrange)

DIM. Cerco di ricondurmi ai teoremi precedenti.

Pongo $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

con α, β da trovare in modo che $h(b) = h(a)$

CIOÈ

$$\alpha f(b) + \beta g(b) = \alpha f(a) + \beta g(a)$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha\left(f(b)-f(a)\right)+\beta\left(g(b)-g(a)\right)=0$$

POSSO PRENDERE
$$\boxed{\begin{aligned}\alpha &= g(b)-g(a)\\ \beta &= -\left(f(b)-f(a)\right)\end{aligned}}$$

DUNQUE PER Rolle esiste $x \in]a,b[$ tale che

$h'(x)=0$, cioè $\alpha f'(x)+\beta g'(x)=0$

$$\iff \left(g(b)-g(a)\right) f'(x) = \left(f(b)-f(a)\right) g'(x)$$

DICO CHE $g(b)\neq g(a)$; se no per Rolle $\exists\, x'$ tale che $g'(x')=0$ IMPOSSIBILE PER IPOTESI

$\Rightarrow$ POSSO DIVIDERE per $g'(x)$ e per $g(b)-g(a)$ e ottenere

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \qquad \#$$