Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

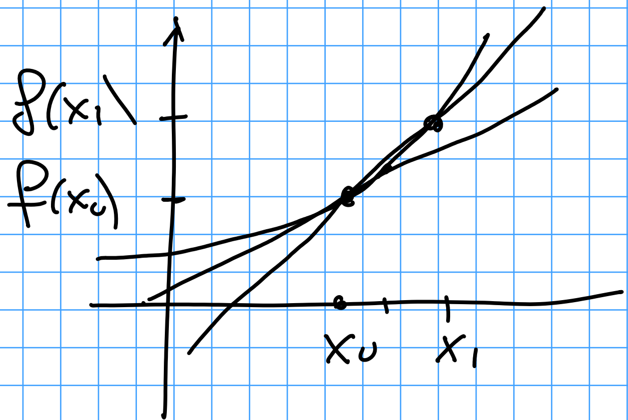
Lezione 18, 1 dicembre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

DERIVATA. Qual è l'idea?

(1) Problema: Tangente a un grafico

Supponiamo di avere una $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$



Se prendo $x_1 \neq x_0$, posso considerare la retta per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. Tale retta ha equazione

$$y = f(x_0) + \boxed{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x}} (x - x_0)$$

$$\left(\begin{array}{lll} \text{Nota: se } x = x_0 & \text{trovo} & y = f(x_0) \\ \phantom{\text{Nota: }}\text{se } x = x_1 & \text{trovo} & f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) = f(x_1) \end{array} \right)$$

Se avvicino x_1 a x_0 tale retta "tende a mettersi tangente"

A PATTO CHE ESISTA IL LIMITE DEL COEFF. ANGOLARE

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \quad \text{per } x_1 \to x_0$$

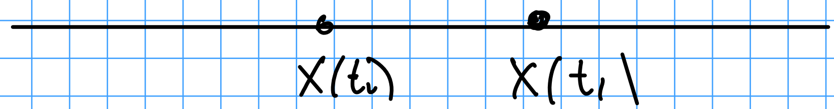
DUNQUE se tale limite esiste

$$\boxed{m := \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}$$

la retta tangente avrà equazione $y = f(x_0) + m(x-x_0)$

(2) (Punto di vista fisico). Ho un punto che si muove su una retta, di cui conosco la legge del moto: t = tempo, $x(t)$ = posizione al tempo t

Prendo $t_0 \neq t_1$



Il rapporto $\frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0}$ $\left(\frac{\text{SPAZIO}}{\text{TEMPO}}\right)$ è la velocità media tra t_0 e t_1. Se faccio

$$\boxed{\lim_{t_1 \to t_0} \frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0}}$$

(AMMESSO CHE ESISTA)

TROVO (in realtà è una definizione) la VELOCITÀ DEL PUNTO ALL'ISTANTE t_0

TUTTO PORTA A CONSIDERARE LIMITI DI QUESTO TIPO:

<u>DEFINIZIONE</u> Dato $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ (I contiene i punti vicini a x_0). Se esiste <u>FINITO</u>

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{RAPPORTO INCREMENTALE DI } f \text{ TRA } x \text{ E } x_0} = \ell$$

DICO che f è derivabile in x_0 e chiamo DERIVATA DI f in x_0 tale limite ℓ, che indico con

$f'(x_0)$ (o $\frac{d}{dx} f(x_0)$ ← NOTAZIONE TRADIZIONALE UN PO' AMBIGUA)

Se poi f è derivabile in tutti i punti x_0 di I

dirò che f è derivabile in I. In questo risulta definita la funzione $f' : I \to \mathbb{R}$ (LA DERIVATA)

(L'OPERAZIONE DI DERIVATA "CREA" UNA NUOVA FUNZIONE f' A PARTIRE DA f)

IN GENERALE $f'(x)$ RAPPRESENTA IL "TASSO DI VARIAZIONE" DI f in x_0

<u>OSSERVAZIONE</u> DIRE CHE f ha derivata $f'(x_0)$ (IN x_0):

$$\exists \quad m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff$$

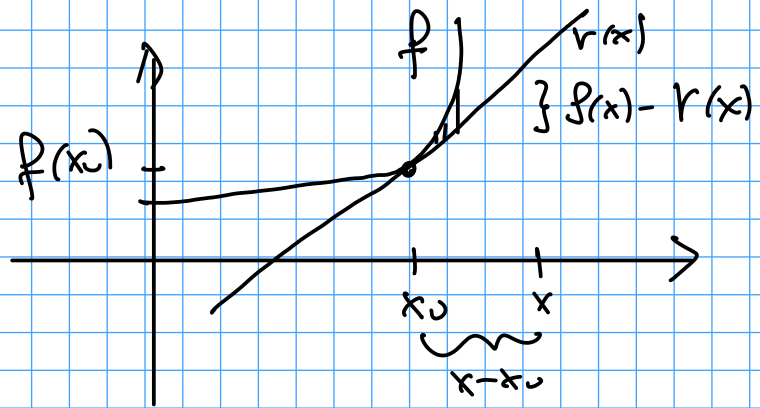
$$\exists \; m \text{ tale che } \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right) = 0 \iff$$

$$\exists \; m \text{ tale che } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \iff$$

$\exists\, m$ tale che $f(x) - f(x_0) - m(x-x_0) = o(x-x_0) \iff$

$\exists\, m$ tale che $f(x) = f(x_0) + m(x-x_0) + o(x-x_0)$

c'è un coefficiente angolare m tale che $f(x)$ differisce dalla retta $y = f(x_0) + m(x-x_0)$, di un $o(x-x_0)$



ALCUNI ESEMPI

- **f costante** $\Rightarrow f' = 0$

$f(x) = k \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\overset{=0}{k-k}}{x - x_0} \longrightarrow 0$ se $x \to x_0$

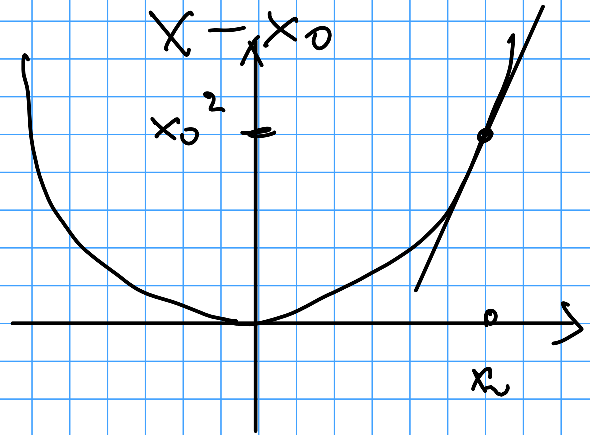
PIU' IN GENERALE

- $f(x) = mx + q \Rightarrow f'(x) = m$ (costante)

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{mx+q-mx_0-q}{x-x_0} = \frac{m(x-x_0)}{x-x_0} = m \to m$$

• $f(x)=x^2$. Prendiamo x_0 e proviamo a calcolare $f'(x_0)$ mediante la definizione

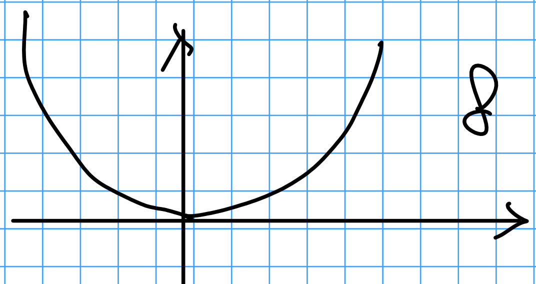
$$\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{\cancel{(x-x_0)}(x+x_0)}{\cancel{x-x_0}} = x+x_0 \xrightarrow{(x\to x_0)} x_0+x_0=2x_0$$



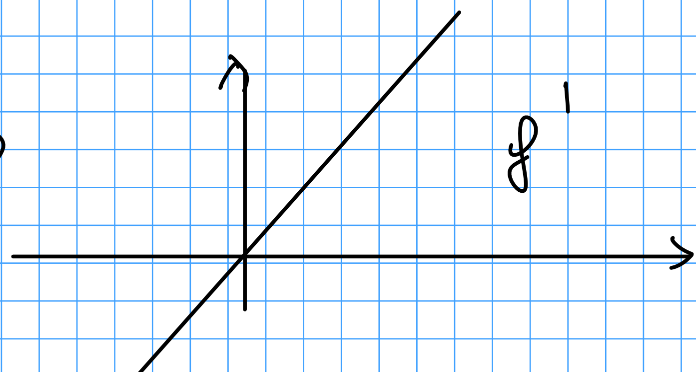
QUINDI LA RETTA TANGENTE A $f(x)=x^2$ NEL PUNTO x_0 HA EQUAZIONE

$$y = x_0^2+2x_0(x-x_0)$$

e la derivata $f'(x) = 2x$



$f \Rightarrow$



f'

ALTRI ESEMPI: QUASI TUTTI I LIMITI NOTEVOLI $(x \to 0)$ SONO LE DERIVATE IN $x_0 = 0$ DI CERTE FUNZIONI

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$ SIGNIFICA che $f(x) = e^x$ HA DERIVATA 1 in $x = 0$

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$ SIGNIFICA che $f(x) = \ln(1+x)$ HA DERIVATA 1 IN $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} = 2$$ SIGNIFICA che $f(x) = (1+x)^2$ HA DERIVATA 2 IN $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \Rightarrow$$ DERIVATA DI $\sin(x)$ VALE 1 IN $x=0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ DERIVATA DI $\cos(x)$ VALE 0 IN $x=0$

PROVIAMO A TROVARE LE DERIVATE IN $x_0 \neq 0$

- $f(x) = e^x$; devo fare $\dfrac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \dfrac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1 \quad \text{DUNQUE}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$$

NE SEGUE $f'(x) = e^x$

- $f(x) = \sin(x)$ Prendo x_0 e faccio il limite del rapp. incr.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin((x - x_0) + x_0) - \sin(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\overbrace{\sin(x - x_0)\cos(x_0)}^{1} + \overbrace{\cos(x - x_0)\sin(x_0) - \sin(x_0)}^{2}}{x - x_0} =$$

$$\cos(x_0) \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0}}_{=1} + \sin(x_0) \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{\cos(x - x_0) - 1}{x - x_0}}_{=0} = \cos(x_0)$$

metto $y = x - x_0$ e uso i limiti notevoli

$f'(x) = \cos(x)$

• $f(x) = \cos(x)$ (come prima)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to} \frac{\overbrace{\cos(x-x_0)\cos(x_0) - \sin(x-x_0)\sin(x_0)}^{\cos(x) = \cos(x - x_0 + x_0)} - \cos(x_0)}{x - x_0}$$

$$\cos(x_0) \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{\cos(x-x_0) - 1}{x - x_0}}_{\text{ZERO}} - \sin(x_0) \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0}}_{\text{UNO}} = -\sin(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x)$$

TEOREMI $\leftrightarrow$ PROPRIETÀ DELLA DERIVATA.

(1) Se f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è continua

NON VALE IL VICEVERSA

Dim. Supponiamo $\exists\, f'(x_0)$. Allora

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0}, \quad \text{se } x \to x_0$$

DUNQUE $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, cioè f continua in x_0

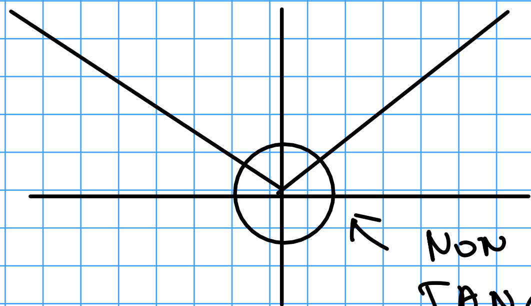
PERÒ se per esempio $f(x) = |x| \Rightarrow f$ è continua

MA NON È DERIVABILE IN $x_0 = 0$. IN EFFETTI

$$R(x) := \frac{f(x) - f(0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

dunque $\lim_{x \to 0^+} R(x) = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} R(x) = -1$ NON ESISTE IL LIMITE

C'È UNO SPIGOLO



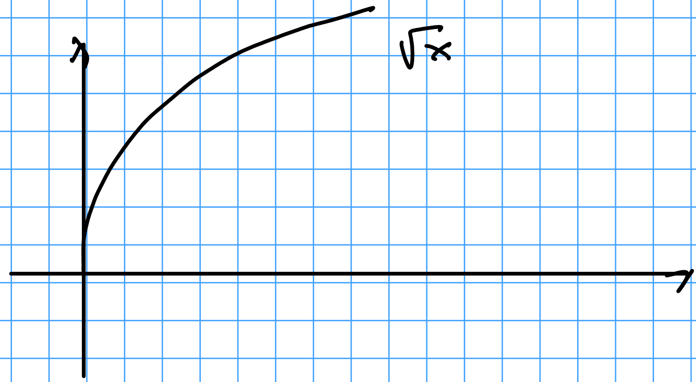
NON C'È LA RETTA TANGENTE !!

ALTRO CONTROESEMPIO

$f(x) = \sqrt{x}$ per $x > 0$ (qui si può considerare solo la derivata "da destra" –)

FACCIO IL RAPP. INCR. per $x > 0$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty \quad \text{se } x \to 0$$



C'È UNA TANGENTE VERTICALE

ANCHE SE $f(x)$ È CONTINUA IN $x_0 = 0$

LEZIONE DI RECUPERO
(DA CONFERMARE)

LUNEDÌ 10 9.30 - 12.30 AULA ??

---

(2) <u>LINEARITÀ</u> : Se f e g sono derivabili in x_0

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora la combinazione lineare

$\alpha f + \beta g$ è derivabile in x_0 e

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

DIM (OVVIA – NON RICHIESTA)

(3) DERIVATA DEL PRODOTTO Se f, g derivabili in x_0

$\Rightarrow f \cdot g$ è derivabile in x_0 e

$$\boxed{(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)}$$

DIM. Devo fare il rapp. incr. del prodotto

$$\frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)\big(g(x) - g(x_0)\big) + f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0}$$

$$\underset{\downarrow\, f(x_0)}{f(x)}\ \underset{\downarrow\, g'(x_0)}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} + \underset{\downarrow\, g(x_0)}{g(x_0)}\ \underset{\downarrow\, f'(x_0)}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Se faccio tendere $x \to x_0$ trovo $f(x_0)\, g'(x_0) + f'(x_0)\, g(x_0)$

(ho usato il fatto che f derivabile $\Rightarrow f$ continua, per dire che $f(x) \to f(x_0)$)

(3) Se f è derivabile in x_0, $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{f}$ è derivabile in x_0 e $\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f(x_0)^2}}$

<u>Dim.</u> Faccio il rapp. incr. di $\frac{1}{f}$ tra x e x_0:

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)f(x_0)}}{x-x_0} = \underbrace{\frac{1}{f(x)f(x_0)}}_{\downarrow\ \frac{1}{f(x_0)^2}} \underbrace{\frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0}}_{\downarrow\ -f'(x_0)}$$

<u>CONSEGUENZA</u>

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \left(\frac{1}{g}\right) + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' =$$

$$\frac{f'}{g} + f\left(\frac{-g'}{g^2}\right) = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

(4)

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$$(f \circ g)' = \ ??$$

$g : I \to I_1 \ , \ f : I_1 \to \mathbb{R}$

$x_0 \in I \ , \ y_0 = g(x_0) \in I_1$

g derivabile in x_0, f derivabile in y_0

$\Rightarrow \ f \circ g \ \left(f \circ g(x) = f(g(x)) \right)$ e'

derivabile in x_0 e si ha:

$$\boxed{(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)}$$

PER ESEMPIO

se $f(y) = m_1 y + q_1$ $\Rightarrow$

$g(x) = mx + q$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(mx+q) = m_1(mx+q) + q_1$$

$$= \underbrace{m_1 m}_{\text{COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA COMPOSIZIONE}} x + m_1 q + q_1$$

DIM IDEA (INGENUA) DI DIM.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}}_{\substack{\text{cambio di variabile} \\ y = g(x)}} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{g'(x_0)} =$$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(y_0)\, g'(x_0)$$

IL PROBLEMA È CHE SE $g(x) = g(x_0)$ NON POSSO DIVIDERE — però la dim. si può "aggiustare" e la tesi comunque è vera. NOI CI ACCONTENTIAMO

CONSEGUENZE DELLE FORMULE TROVATE

DERIVATA DI X^n , $n \in \mathbb{Z}$ (intero relativo)

Se $n \geq 0$ USO LA DERIVATA DEL PRODOTTO

- $f(x) = x^2 = x \cdot x \Rightarrow$

  $f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$

- $f(x) = x^3 = x^2 \cdot x \Rightarrow$

  $f'(x) = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$

- $f(x) = x^4 = x^3 \cdot x$

  $f'(x) = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3$

⋮

SE VOGLIO RENDERE RIGOROSO IL TUTTO USO L'INDUZIONE E DICO CHE

se $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

VERA per $n = 1$ (la derivata di $f(x) = x$ vale 1)

SE È VERA PER n $\Rightarrow$

prendo $f(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x$, uso la derivata del prodotto

$$\Rightarrow f'(x) = n x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1) x^n$$

USO L'IPOTESI INDUTTIVA

$\Rightarrow$ È VERA PER $n+1$

DUNQUE È VERA PER OGNI $n \geq 1$ (INTERO)

PER GLI $n < 0$ USO LA DERIVATA DEL RECIPROCO ($x \neq 0$)

$$f(x) = x^n = \frac{1}{x^{-n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-(-n)x^{-n-1}}{(x^{-n})^2} = n\frac{x^{-n-1}}{x^{-2n}} = n x^{n-1}$$

---

(5) DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Se $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua e invertibile in I

$x_0 \in I$, f derivabile in x_0, $f'(x_0) \neq 0$

ALLORA, posto $y_0 = f(x_0)$, si ha che f^{-1} è derivabile in y_0

e $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ATTENZIONE A LEGGERE QUESTA FORMULA

$y_0 \neq x_0$

(NO DIM.)

SE QUANTO SOPRA È VERO IN TUTTI I PUNTI, LA FORMULA SI PUÒ SCRIVERE:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}} \qquad \forall y$$

$$\left((f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \right)$$

ESEMPI (a) $f(x) = e^x$, chiamiamo $g(x) = f^{-1}(x)$

cioè $g(x) = \ln(x)$. ALLORA

$$f'(x) = e^x \neq 0 \quad \forall x$$

DUNQUE POSSO APPLICARE (5) e trovo

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

(b) $f(x) = x^n$ $(n \geq 1)$ per $x \geq 0$ $\quad g(x) = \sqrt[n]{x}$ $\quad (g = f^{-1})$

$$f'(x) = n x^{n-1} \neq 0$$ A PATTO CHE $x \neq 0$

DUNQUE, se $x \neq 0$, $\quad g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} = \dfrac{1}{n\, g(x)^{n-1}} =$

$$\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

quindi la formula $\dfrac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ vale anche se $\alpha = \dfrac{1}{n}$

USANDO I TEOREMI DI CALCOLO DELLE DER. SI TROVA

$$\frac{d}{dx} x^q = q\, x^{q-1} \quad \text{per tutti i } q \in \mathbb{Q}$$

(idea: $q = \frac{n}{m}$ e allora $x^q = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$ . . . .)

POSSO ANCHE DIMOSTRARE

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1} \quad \text{PER } \alpha \in \mathbb{R} \quad \underline{\underline{x>0}}$$

(IN QUESTO CASO È OPPORTUNO PENSARE $f(x) = x^\alpha$ SOLO PER $x>0$)

IN EFFETTI $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \Rightarrow$

$f'(x) =$ (derivata della funzione composta)

$$e^{\alpha \ln(x)} \cdot (\alpha \ln(x))' = e^{\alpha \ln(x)} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^\alpha \cdot \alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

<u>FORMALMENTE</u> $f(x) = h(g(x))$ dove

$$h(y) = e^y \Rightarrow h'(y) = e^y$$

$$g(x) = \alpha \ln(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{\alpha}{x}$$

QUINDI

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\alpha \ln(x)} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

REGOLA UTILE

SE DEVO DERIVARE $f(x)^{g(x)}$ SCRIVO

$$h(x) = \boxed{f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}} \Rightarrow$$

$$h'(x) = e^{g(x)\ln(f(x))}\left(g(x)\ln(f(x))\right)' =$$

non importa ricordarsi questi calcoli

$$f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x)\right) =$$

$$f(x)^{g(x)} \frac{g'(x) f(x) \ln(f(x)) + g(x) f'(x)}{f(x)} =$$

$$f(x)^{g(x)-1}\left(g'(x) f(x) \ln(f(x)) + g(x) f'(x)\right)$$

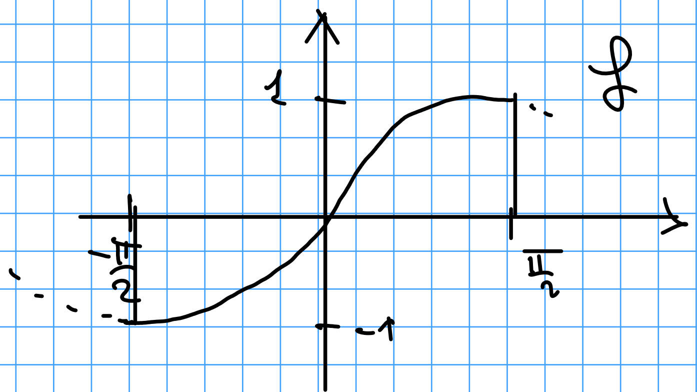
PER ESEMPIO $\quad f(x) = x^x = e^{x\ln(x)} \Rightarrow$

$$f'(x) = e^{x\ln(x)}\left(x\ln(x)\right)' = x^x\left(\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}\right) =$$

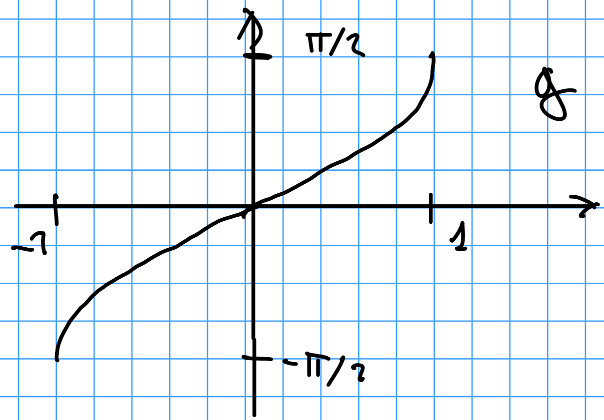
$$x^x\left(\ln(x)+1\right)$$

ESEMPIO $\quad f(x) = \sin(x)$ per $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

f è invertibile e $f^{-1}(x) = g(x) = \arcsin(x)$



$\Rightarrow$



$f'(x) = \cos(x) \neq 0$ se $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$. Allora g

è derivabile in $x \neq \pm 1$ (LE IMMAGINI, TRAMITE f, di $\pm\frac{\pi}{2}$)

e $\quad g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))} \qquad x \neq 0$

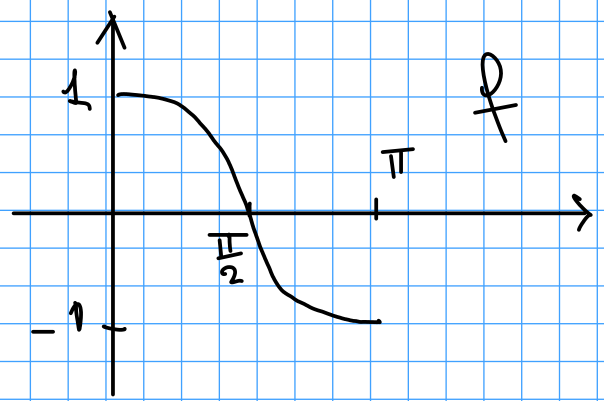
Dato che $\theta = \arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\;\Rightarrow\; \cos(\theta) = +\sqrt{1-\sin^2(\theta)}$

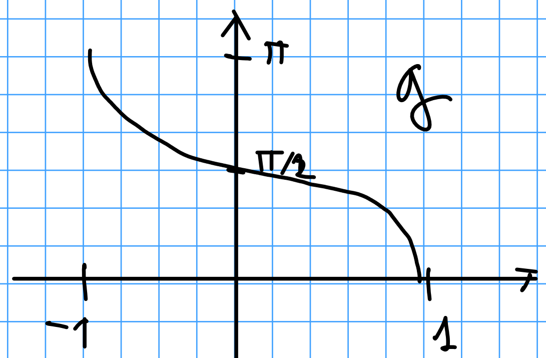
da cui $\quad g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(5) RAGIONANDO NELLO STESSO MODO SI VEDE CHE

se $\quad g(x) = \arccos(x) \qquad g : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$$\Downarrow$$

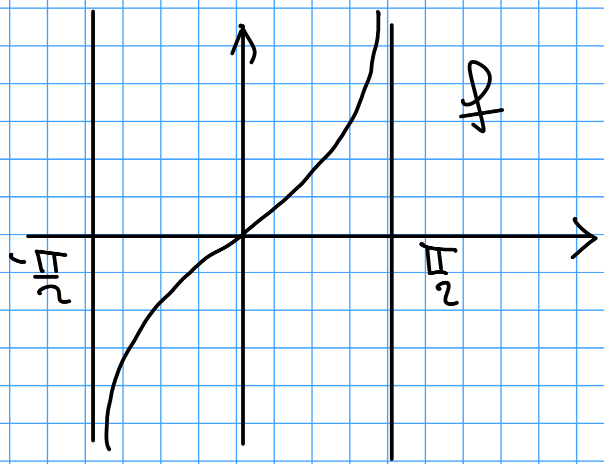




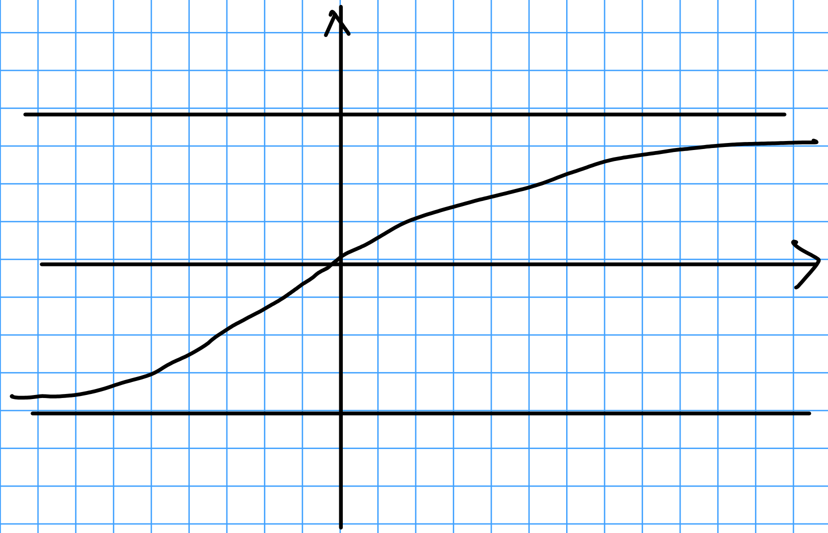
$g'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

per $x \neq \pm 1$

(c) $f(x) = \tan(x)$ su $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



$\Rightarrow$



$g(x) = f^{-1}(x) = \arctan(x)$. su $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \begin{cases} 1 + \tan^2(x) \longleftarrow \text{uso questa} \\ \frac{1}{\cos^2(x)} \end{cases}$$

$\neq 0 \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$