Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 17, 30 novembre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

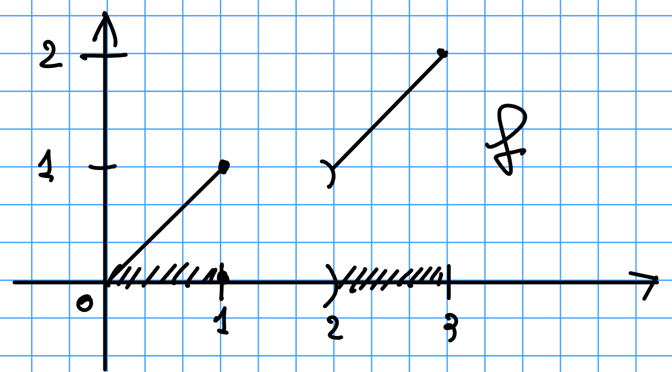
PROBLEMA: Se f è continua $\Rightarrow$?? f^{-1} è continua?

Ricordiamo che f^{-1} è la funzione che "inverte" f

$$f^{-1}(y) = \text{quel } x \text{ tale che } f(x) = y$$

IN GENERALE NON È VERO CHE f cont. $\Rightarrow$ f^{-1} cont.

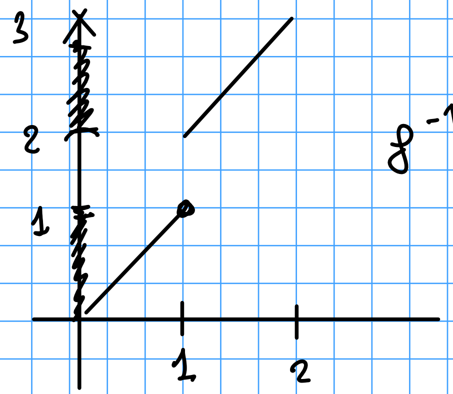
Per esempio se $A = [0,1] \cup]2,3]$



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

- f è una funzione CONTINUA su A (punto per punto f è continua)
- f è iniettiva: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (NOTA $2 \notin A$)
- $f(A) = [0,2]$

DUNQUE ESISTE $f^{-1} : [0, 2] \to A$



$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ x+1 & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

QUESTA f^{-1} È DISCONTINUA IN $x = 1$.

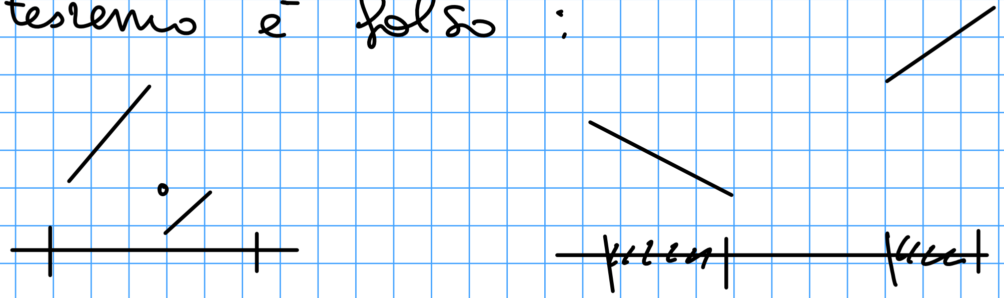
IL "DIFETTO" DI A è che è "fatto di due pezzi"

Se $\boxed{A \text{ è un intervallo}}$ $\Rightarrow$ <u>IL TEOREMA VALE</u>

Prima di vedere questo, mostriamo un risultato preliminare.

<u>TEOREMA</u> Se I è un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ è continua e iniettiva, allora f è strettamente monotona.

NOTA se non è continua / se I non è un intervallo il teorema è falso:



Dim. Si ragiona per assurdo: suppongo che f sia continua, iniettiva, ma che non sia né crescente né decrescente.

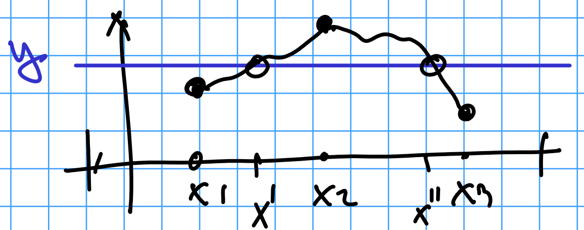
NEGARE LA CRESCENZA: ci sono $x_1 < x_2 < x_3$ per cui $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$

" " DECRESCENZA " " $x_1 < x_2 < x_3$ $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$

(si vede - è intuitivo)

Mettiamo per esempio che valga il primo caso:

$\exists \; x_1 < x_2 < x_3$ ma $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_3) < f(x_2)$



Allora posso prendere un y tale che

$f(x_1) < y < f(x_2)$ E $f(x_3) < y < f(x_2)$

(y compreso tra $\max(f_1(x), f(x_3))$ e $f(x_2)$)

- PER IL TEOR. DEI VAL. INTERMEDI, APPLICATO SU $[x_1, x_2]$ trovo $x' \in]x_1, x_2[$ per cui $f(x') = y$
- PER IL TEOR. DEI VAL. INTERMEDI, APPLICATO SU $[x_2, x_3]$, trovo $x'' \in]x_2, x_3[$, con $f(x'') = y$
- ALLORA $x' < x''$ MA $f(x') = f(x'')$, CONTRO L'IPOTESI CHE f SIA INIETTIVA $\#$

RICORDIAMO ALLORA CHE, SE f è CRESCENTE / DECR.

f CONTINUA IN $x_0 \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

ESISTONO SICURAMENTE

(L'abbiamo usato quando abbiamo costruito la funzione esponenziale)

TEOREMA (CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua e iniettiva. ALLORA

(a) $f(I)$ $(=: J)$ è un intervallo

(b) (immediato) esiste $f^{-1} : J \to I$

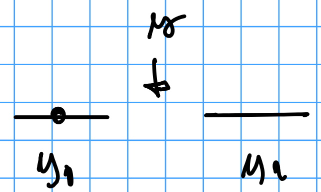
(c) f^{-1} è continua in J

DIM.

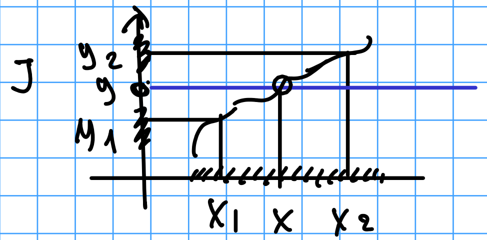
(a) È una conseguenza del teorema dei val. intermedi.

Se J non fosse un intervallo troverei tre punti

$$y_1 < y < y_2 \quad \text{con} \quad y_1, y_2 \in J \quad \text{ma } y \notin J$$



MA dire che
$$\begin{aligned} y_1 \in f(I) = J \\ y_2 \in f(I) = J \end{aligned} \iff \begin{aligned} \exists\, x_1 \in I &: f(x_1) = y_1 \\ \exists\, x_2 \in I &: f(x_2) = y_2 \end{aligned}$$



DATO CHE I è un INTERVALLO
$[x_1, x_2] \subset I$
PER IL T. VAL. INTERMEDI

$\exists\ x \in]x_1, x_2[$ per cui $f(x) = y \iff y \in f(I) = J$

ASSURDO. J DEVE ESSERE UN INTERVALLO

(b) è evidente

(c) Dato che f è continua ed è iniettiva, I è intervallo

$\Rightarrow$ f deve essere monotona.

METTIAMO CHE SIA CRESCENTE.

NE SEGUE CHE f^{-1} è CRESCENTE:

(se $y_1 < y_2$ allora deve essere $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

INFATTI SE NON FOSSE VERO $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$

CI APPLICO f, che è crescente, e trovo

$$f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \iff y_1 \geq y_2$$

ASSURDO

DIMOSTRIAMO CHE f^{-1} è continua. Prendiamo un punto $y_0 \in J$. Per dimostrare la continuità, dimostro che

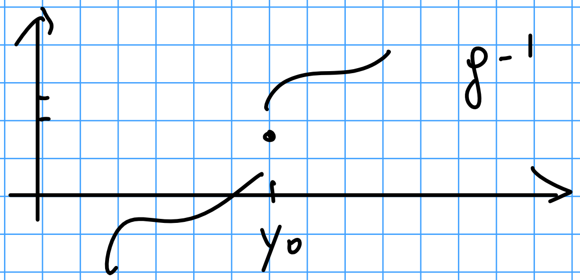
$$\lim_{y\to y_0^+} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$$

E

$$\lim_{y\to y_0^-} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$$

VEDIAMO LA PRIMA DELLE DUE. Se non fosse vera avrei

$$\lim_{y\to y_0^+} f^{-1}(y) > f^{-1}(y_0)$$ (f^{-1} crescente)



APPLICO f (strett. crescente) $\Rightarrow$

$$f\left(\lim_{y\to y_0^+} f^{-1}(y)\right) > f\left(f^{-1}(y_0)\right) = y_0$$

PER LA CONTINUITÀ DI f si ha

$$(*) \to \lim_{y\to y_0} \overbrace{f\left(f^{-1}(y)\right)}^{y} = f\left(\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y)\right)$$

MA ALLORA:

$$y_0 = \lim_{y \to y_0} y > y_0 \quad \text{ASSURDO}$$

IN DEFINITIVA f^{-1} è continua in y_0 ($\Rightarrow$ in J)

TUTTE LE INVERSE DELLE "FUNZIONI ELEMENTARI" SONO CONTINUE:

$x \to \ln(x)$ $\quad$ $x \to \arctan(x)$

$x \to \sqrt[n]{x}$ (su $\mathbb{R}$ se n dispari / su $[0,+\infty[$ se n pari)

$x \mapsto \arcsin(x)$ su $[-1,1]$

$x \mapsto \arccos(x)$ su $[-1,1]$

<u>OSS</u> (ragionando come nella dim precedente)

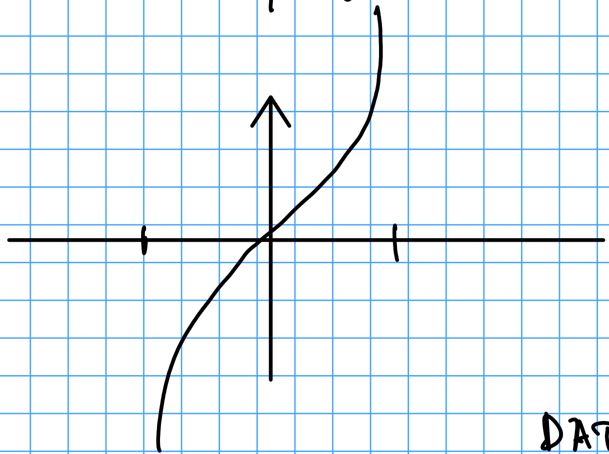
$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ $\quad -\infty \leq a < b \leq +\infty$

continua e iniettiva. ALLORA

(a) Esistono $\alpha = \lim_{x \to a^+} f(x)$, $\beta = \lim_{x \to b^-} f(x)$ (in $\overline{\mathbb{R}}$)

(b) $J = f(]a,b[) = \begin{cases}]\alpha,\beta[& \text{se } f \text{ crescente} \\ ]\beta,\alpha[& \text{se } f \text{ decrescente} \end{cases}$

(c) $\lim_{y\to\alpha} f^{-1}(y) = a \qquad \lim_{y\to\beta} f^{-1}(y) = b$



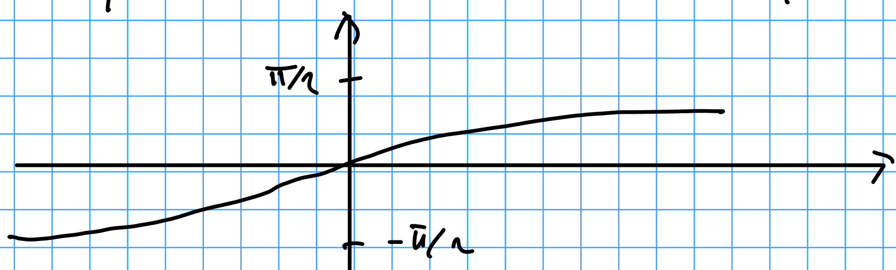
($f(x) = \tan(x)$ RISTRETTA A $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

DATO CHE $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$ $\Longrightarrow$

f^{-1} è definita su $]-\infty, +\infty[$ e vale

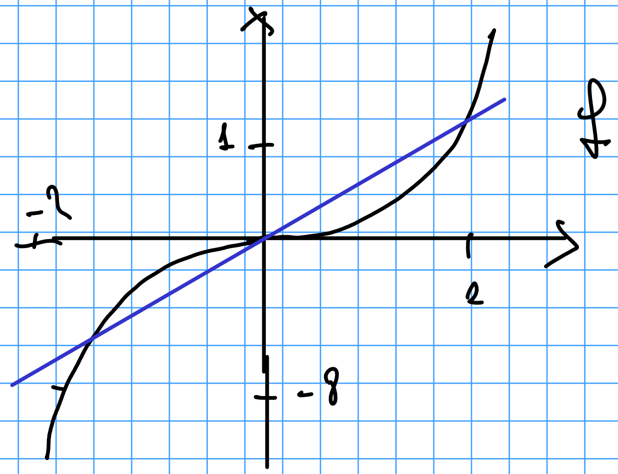
$\lim_{y\to-\infty} f^{-1}(y) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = \frac{\pi}{2}$



$(f^{-1} = \arctan)$

(FUNZIONE INVERSA)

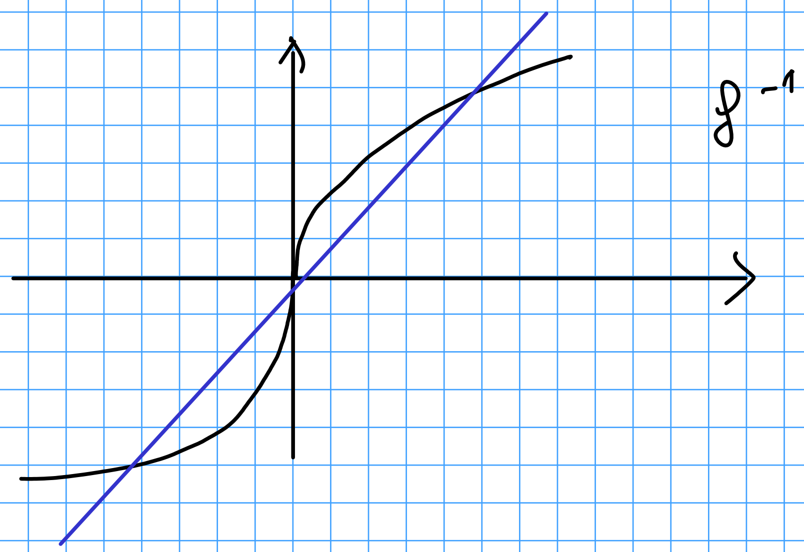
$$f(x) = x^3$$



$f(1) = 1$

$f(3) = 27$

$f(-2) = -8$



$f^{-1}(1) = 1$

$f^{-1}(-8) = -2$

$f^{-1}(27) = -3$

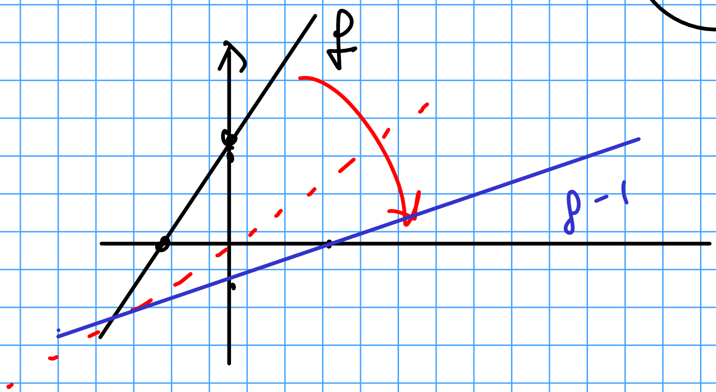
$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

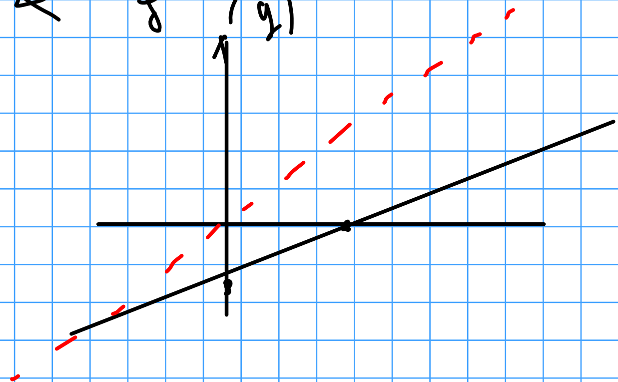
$f(x) = 3x + 2$ $\qquad \left(f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \right)$

$y = 3x + 2$ e trovo x in termini di y

$y - 2 = 3x$ $\qquad \dfrac{y-2}{3} = x$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \; f^{-1}(y)$





ESERCIZI SUI LIMITI (dall'ultima lista)

(20) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2^x\left(\ln(4+2^x+3^x) - \ln(3+2^x)\right)$

(21) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2^x\left(\ln(4+2^x+3^x) - \ln(1-2^x+3^x)\right)$

(26) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x\left(x - \ln(1+e^x+x^2)\right)$

(20)

$$2^x\left(\ln\left(4+2^x+3^x\right)-\ln\left(3+2^x\right)\right) = \;??$$

A PRIMA VISTA HO $+\infty\left(+\infty-(+\infty)\right)$

APPLICO LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI :

$$2^x \ln\left(\frac{4+2^x+3^x}{3+2^x}\right)$$

COSA FA $\dfrac{4+2^x+3^x}{3+2^x}$??

$$= \frac{3^x}{2^x}\,\frac{\left(\frac{4}{3^x}+\frac{2^x}{3^x}+1\right)}{\left(\frac{3}{2^x}+1\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^x \frac{\left(\overset{\to 0}{\frac{4}{3^x}}+\overset{\to 0}{\left(\frac{2}{3}\right)^x}+1\right)}{\left(\underset{\to 0}{\frac{3}{2^x}}+1\right)}$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^x \frac{1+o(1)}{1+o(1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^3\left(1+o(1)\right) \longrightarrow \underline{\underline{+\infty}}$$

perché $\dfrac{3}{2}>1$

DUNQUE IL LIMITE DI PARTENZA VIENE

$$+\infty \ln(+\infty) = \boxed{+\infty}$$

(21)

$$2^x\left(\ln(4+2^x+3^x)-\ln(1-2^x+3^x)\right)=$$

$$2^x\ \ln\left(\frac{4+2^x+3^x}{1-2^x+3^x}\right)$$

GUARDIAMO IL PEZZO DENTRO $\ln(\quad)$

$$\star\quad \frac{4+2^x+3^x}{1-2^x+3^x}=\frac{\cancel{3^x}}{\cancel{3^x}}\ \frac{\frac{4}{3^x}+\frac{2^x}{3^x}+1}{\frac{1}{3^x}-\frac{2^x}{3^x}+1}=\frac{1+o(1)}{1+o(1)}\to 1$$

DUNQUE IL LIMITE "SI PRESENTA" COME

$+\infty\cdot\ln(1)=+\infty\cdot 0$ INDETERMINATA

DOBBIAMO CAPIRE MEGLIO COME $\star\to 1$.

$$\star=\underbrace{\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{4}{3^x}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{3^x}}-1}_{\text{tende a zero}}+1=$$

$$1+\frac{\cancel{1}+\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{4}{3^x}-\cancel{1}+\left(\frac{2}{3}\right)^x-\frac{1}{3^x}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{3^x}}=$$

$$1+\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{3}{3^x}}{1+o(1)}=1+\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+o(1)}\left(1+\left(\frac{3}{2}\right)^x\frac{3}{2\,3^x}\right)$$

$$1+2\left(\frac{2}{3}\right)^x\frac{1+\frac{3}{2}\frac{1}{2^x}}{1+o(1)}=1+2\left(\frac{2}{3}\right)^x\frac{1+o(1)}{1+o(1)}=$$

$$1+\underbrace{2\left(\frac{2}{3}\right)^x+o\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}_{y}\quad\left(=\frac{4+2^x+3^x}{1-2^x+3^x}\right)$$

Applico la proprietà di $\ln(1+y)=y+o(y)$

con $y=2\left(\frac{2}{3}\right)^x+o\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)$ TROVO

$$\ln\left(\frac{4+2^x+3^x}{1-2^x+3^x}\right)=\ln\left(1+\underbrace{2\left(\frac{2}{3}\right)^x+o\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}\right)=$$

$$2\left(\frac{2}{3}\right)^x+o\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)+o\left(\underbrace{2\left(\frac{2}{3}\right)^x+o\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}_{O\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}\right)=$$

$$o\left(O\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)\right)$$

$$2\left(\frac{2}{3}\right)^x+o\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)$$

SE MOLTIPLICO PER 2^x

$$2^x \ln\left(\frac{4+2^x+3^x}{1-2^x+3^x}\right) = 2\,\frac{2^x\,2^x}{3^x} + o\left(\text{---}\right)$$

$$= 2\left(\frac{4}{3}\right)^x + o\left(\left(\frac{4}{3}\right)^x\right) \to +\infty$$

dato che $\frac{4}{3} > 1$

(26) $\lim_{x\to\infty} e^x\left(x-\ln\left(1+e^x+x^2\right)\right)$

$$e^x\left(x-\ln\left(1+e^x+x^2\right)\right) =$$

$$e^x\left(x-\ln\left(e^x\left(e^{-x}+1+x^2e^{-x}\right)\right)\right) =$$

$$e^x\left(\cancel{x}-\cancel{\ln(e^x)}-\ln\left(1+x^2e^{-x}+e^{-x}\right)\right)$$

$$-e^x\ln\left(1+\underbrace{x^2e^{-x}+e^{-x}}_{y}\right) = \left(\ln(1+y)=y+o(y)\right)$$

$$-e^x\left(x^2e^{-x}+e^{-x}+o\left(\text{---}\right)\right) =$$

$$-x^2-1+o\left(x^2+1\right) \to -\infty$$

CONTROLLARE IL SEGNO