Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 16, 24 novembre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

FUNZIONI CONTINUE

Def. $A \subset \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$. DICO CHE f È CONTINUA IN x_0, se

(a) x_0 non è di accumulazione per A.

(b) x_0 è di accumulazione e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ } CASO IMPORTANTE PER NOI

OSS. Se x_0 non è di occ. per A, allora qualunque f è automaticamente continua in x_0. PER ESEMPIO una successione $\{a_n\}$ – che è una funzione $a(n)$ per $n \in \mathbb{N}$ – è continua in ogni punto $n \in \mathbb{N}$.

NEI CASI CHE INTERESSANO A NOI A = UNIONE DI INTERVALLI e tutti i punti di A sono di accumulazione quindi la continuità in x_0 significa $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Def. f si dice continua in A se f è continua in ogni $x_0 \in A$.

ES. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua: Questo significa che $f(x) = \frac{1}{x}$ DEFINITA SUL SUO "DOMINIO NATURALE" $A = \{x \neq 0\}$

è continuo su tale insieme. In effetti, dato $x_0 \neq 0$

è evidente che $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$

NON HA SENSO CHIEDERSI SE $\frac{1}{x}$ sia continua in $x_0 = 0$.

<u>PROBLEMA</u> Se $f: A \to \mathbb{R}$ <u>x_0 punto di accumulazione</u> per A

DOMANDA: posso definire $f(x_0)$ (eventualmente modificandola se $x_0 \in A$) in modo che la f così definito sia continua in x_0 ??

<u>PER ESEMPIO</u> Se $f(x) = \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$, posso definire $f(0)$ in modo da rendere f continua. $\boxed{\text{NO}}$ perché

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ (NON posso mettere $f(0) = +\infty$)

<u>INVECE</u> Se $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ NON è DEFINITA IN $x = 0$

PERÒ so CHE $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. DUNQUE POSSO PORRE $f(0) := 1$

e in questo modo f risulta continua

DUNQUE POSSO DISTINGUERE I CASI SEGUENTI:

(1) Esiste $l = \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$. ALLORA SE (RI) DEFINISCO

$$f(x_0) = l \Rightarrow f \text{ così modificata è continua}$$

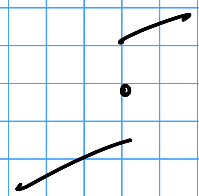
"DISCONTINUITÀ ELIMINABILE"

(2) Esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$. NON POSSO RENDERE f CONTINUA

OPPURE

Non esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$

(3) Esistono $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$



DISCONTINUITÀ DI SALTO

SI RIFANNO TUTTI I TEOREMI SUI LIMITI:

PROPRIETÀ (a) SOMMA / PRODOTTO DI FUNZIONI CONTINUE È UNA FUNZIONE CONTINUA (somma di limiti, prodotto dei limiti)

(B) f, g CONTINUE IN x_0 e $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ CONTINUA IN x_0 (quoziente di limiti)

(C) COMPOSIZIONE DI FUNZIONI CONTINUE È CONTINUA:

$g: A \to B$ $f: B \to \mathbb{R}$ (dove $A, B \subset \mathbb{R}$) $x_0 \in A$, $y_0 = g(x_0)$

SE f è continua in y_0 e g è continua $\Longrightarrow$

$f \circ g$ è continua in x_0 $\left((f \circ g)(x) = f(g(x)) \right)$

Segue dal teorema di cambio di variabile: ATTENZIONE bisogna ricontrollare la dimostrazione perché

NEL CASO IN CUI f è continua in y_0 NON SERVE l'ipotesi $g(x) \neq g(x_0) = y_0$ per $x \neq x_0$

FATTI (1) polinomi, funz. razionali, esponenziali, logaritmi, $\underbrace{\ }_{\text{funzioni trigonometriche}}$ sono funzioni continue (dove definite)

funzione razionale $= \frac{P(x)}{Q(x)}$ dove P/Q polinomi

(2) prodotti, quozienti, composizioni di funzioni al punto (1)

sono continue (DOVE DEFINITE)

$$\ln\left(\cos\left(e^{\frac{1+x}{1+x^2}}\right)\right)$$

SE VOLESSI DIMOSTRARLO NON AVREI PROBLEMI PER QUANTO RIGUARDA $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ quando P, Q polinomi

VEDIAMO COME SI RAGIONA PER DIM. CHE $f(x)=e^x$ è continua. PRIMA MI DOVREI CHIEDERE CHI È e^x ??

RICORDIAMO CHE (1) se $n\in\mathbb{N}$ $x^n = \underbrace{x\cdots x}_{n \text{ VOLTE}}$ $(n>0)$

(2) $\sqrt[n]{x}$ = quell'unico numero $y\geq 0$ tale che $y^n = x$

CI VUOLE $x\geq 0$ (se voglio che le cose funzioni $\forall n$)

CI VUOLE UN TEOREMA CHE MI GARANTISCA CHE UN TALE y ESISTE, QUALUNQUE SIA $x\geq 0$

(3) Dato $n<0$ pongo $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ $(-n>0)$ $x\neq 0$

Se $n=0$ pongo $x^0 := 1$ (HO DEFINITO x^n se $n \in \mathbb{Z}$)

(4) Dati $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ $m \geq 1$ DEFINISCO, per $x>0$,

$$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \qquad \left(x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4} \ !! \right)$$

SI VERIFICA (FACILMENTE) CHE $x^{\frac{n}{m}}$ dipende solo da $\frac{n}{m}$ e non da n e m singolarmente, CIOÈ

se $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n}{m}$ $(n_1 m = n m_1) \Rightarrow \sqrt[m_1]{x^{n_1}} = \sqrt[m]{x^n} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$

HO DEFINITO $f(x) = x^q$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$

$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ (LA POTENZA q-ESIMA)

VALGONO LE PROPRIETÀ $\forall x>0$ $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$

$$x^{q_1+q_2} = x^{q_1} \cdot x^{q_2}$$

$$\left(x^{q_1}\right)^{q_2} = x^{q_1 \cdot q_2}$$

$$\left(x^0 = 1\right)$$

(5) POSSO ESTENDERE x^q a tutti i $q \in \mathbb{R}$

CONSIDERIAMO $x > 1$. IN QUESTO CASO

$$q \mapsto x^q \text{ (VISTA COME FUNZIONE DI } q) \quad \boxed{\text{È CRESCENTE}}$$

$$\left(\overset{\shortparallel}{\exp(q)} \right)$$

INFATTI se $x > 1$ e $q = \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow x^q > 1$

Basta guardare la definizione $x^q = \sqrt[m]{x^n} > \sqrt[m]{1} = 1$

Allora se $q_2 > q_1$ posso scrivere

$$x^{q_2} = x^{q_1 + (q_2 - q_1)} = x^{q_1} \cdot x^{\overbrace{q_2 - q_1}^{> 0}} > x^{q_1} \cdot 1 = x^{q_1}$$

PER QUANDO DETTO SULLE FUNZIONI MONOTONE, dato $q \in \mathbb{R}$

$$\exists \lim_{q' \to q^-} x^{q'} = \sup_{q' < q} x^{q'} \quad / \quad \exists \lim_{q'' \to q^+} x^{q''} = \inf_{q'' > q} x^{q'}$$

NOTA x^q (FINORA) È DEFINITA SOLO SU $\mathbb{Q}$ PERÒ HA SENSO FARNE IL LIMITE per $q' \to q$ ANCHE SE $q \notin \mathbb{Q}$ dato che comunque q è di acc. per $\mathbb{Q}$

(ogni numero reale si può approssimare con dei razionali)

DUNQUE se $q' < q < q'' \Rightarrow$

$$x^{q'} \leq \lim_{q' \to q^-} x^{q'} \leq \lim_{q'' \to q^+} x^{q''} \leq x^{q''}$$

DICO CHE I DUE LIMITI DX e SX SONO EGUALI.

per questo cerco $q' < q < q''$, $q', q'' \in \mathbb{R}$ e $x^{q''} - x^{q'}$ PICCOLO QUANTO VOGLIO

PER QUESTO RICORDIAMO CHE

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x} = 1 \quad , \quad \text{ALLORA} \quad \text{dato } \varepsilon > 0$$

trovo $\bar{n}$ tale che $1 - \varepsilon < x^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$.

Sicuramente nell'intervallo $[\underbrace{q - \tfrac{1}{2n}, q}]$ c'è un q' razionale

e nell'intervallo $[\underbrace{q, q + \tfrac{1}{2n}}]$ c'è un q'' razionale e

$q'' - q' \leq 1/n$

$$x^{q''} - x^{q'} = x^{q'}(x^{q''-q'} - 1) \leq x^{q''} x^{\frac{1}{n}} \leq \varepsilon x^{q''}$$

se $n \geq \bar{n}$. RAGIONANDO COSÌ SI VEDE CHE

$$0 \leq \lim_{q'' \to q^+} x^{q''} - \lim_{q' \to q^-} x^{q'} \leq \underbrace{x^{q''} - x^{q'} < x^{q''} \cdot \varepsilon}$$

Dato che $\varepsilon > 0$ può essere preso piccolo a piacere, deve valere

$$\boxed{\lim_{q'' \to q^+} x^{q''} = \lim_{q' \to q^-} x^{q'}}$$

(Ho usato il limite $\sqrt[n]{x} \to 1$ per $n \to \infty$)

DUNQUE se $q \in \mathbb{R}$ ho visto che

$\exists \lim_{q' \to q} x^{q'}$, allora la funzione $\exp(q) = x^q$

può essere estesa a tutti i $q \in \mathbb{R}$, in modo da risultare CONTINUA

Per esempio $e^{\pi} = \lim_{\substack{q \to \pi \\ q \in \mathbb{Q}}} e^{q}$ (che esiste per quanto sopra)

(6) A questo punto è chiaro (passando al limite) l'esponenziale conserva le proprietà

$$\begin{cases} e^{x+y} = e^x \cdot e^y & x, y \in \mathbb{R} \\ (e^x)^y = e^{x \cdot y} \\ e^0 = 1 \quad e^1 = e \end{cases}$$

$$e^{\pi} = \lim e^{q_n}$$

dove q_n è una qualunque successione di numeri razionali con $\pi = \lim_{n \to \infty} q_n$

per esempio

$q_n = 3,14\ldots$ n-esima cifra

$q_0 = 3, \quad q_1 = 3,1, \quad q_2 = 3,14, \quad \ldots$

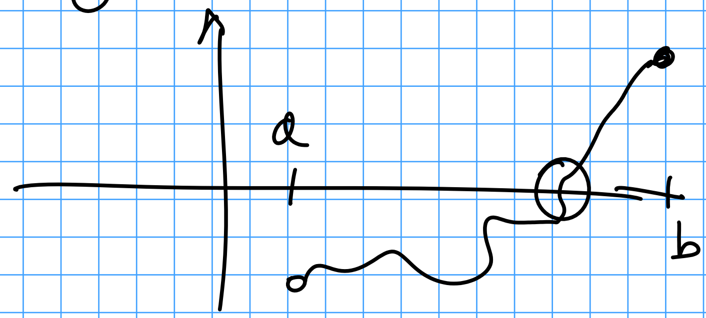
IN QUESTA COSTRUZIONE DI e^x (o di A^x per $A > 0$) HO CONTEMPORANEAMENTE DIMOSTRATO CHE $x \to e^x$ È CONTINUA

È RIMASTO IN SOSPESO IL PROBLEMA DI $\sqrt[n]{x}$ (lo vediamo subito)

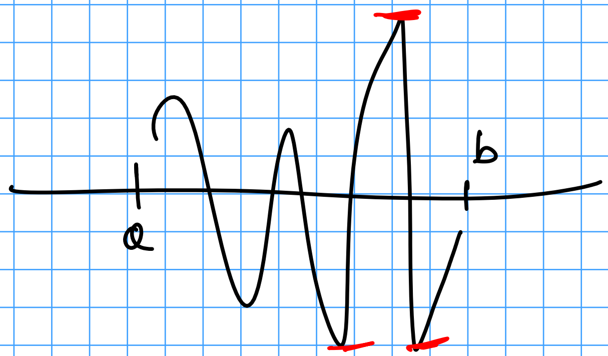
TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE SU UN INTERVALLO. 3 TEOREMI IMPORTANTI

(1) TEOREMA DEGLI ZERI Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f continua, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ ALLORA esiste x in $[a,b]$ per cui $f(x) = 0$



(2) TEOREMA DI WEIERSTRASS Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, ALLORA esistono $\max\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $\min\limits_{a \le x \le b} f(x)$



(3) TEOREMA (SULLA CONTINUITÀ DELL' INVERSA)

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua e iniettiva

Allora

(a) $f(I) =: J$ È UN INTERVALLO e quindi è definito $f^{-1} : J \to I$

(b) f^{-1} È CONTINUA IN J

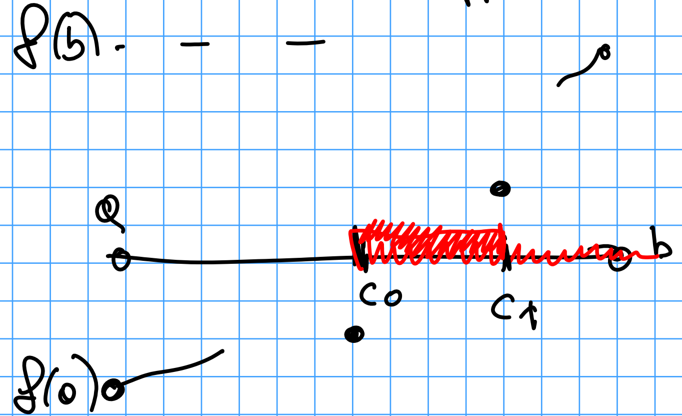
(SIA IN (1) CHE IN (2) USEREMO IL "METODO DI BISEZIONE)

COMINCIAMO COL DIMOSTRARE IL TEOREMA DEGLI ZERI

cerchiamo un punto x (per cui $f(x)=0$) come limite di opportune successioni

Pongo $\underline{a_0 := a}$ $\quad$ $\underline{b_0 = b}$

Chiamo $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$



e calcolo $f(c_0)$. Ci sono 3 casi

(1) $f(c_0) = 0$ HO FINITO (prendo $x = c_0$)

(2) $f(c_0) < 0$ $\quad$ pongo $a_1 = c_0$ $\quad$ $b_1 = b_0$ (mi metto in $[c_0, b_0]$)

(3) $f(c_0) > 0$ $\quad$ pongo $a_1 = a_0$ $\quad$ $b_1 = c_0$ (mi metto in $[a_0, c_0]$)

se non ho trovato $c_0 = 0$ ho un intervallo $[a_1, b_1]$, che è metà di $[a_0, b_0]$ (nel senso che $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$)

e vale la situazione iniziale $f(a_1) < 0$ $f(b_1) > 0$

RICOMINCIO DA $[a_1, b_1]$: prendo $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$

se $f(c_1) = 0$ ho FINITO

se $f(c_1) < 0$ pongo $a_2 = c_1$ $b_2 = b_1$

se $f(c_1) > 0$ pongo $a_2 = b_1$ $b_2 = c_1$

Se non finisco $\Rightarrow$ trovo $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$

tale che $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{4}(b_0 - a_0)$ e

$f(a_2) < 0$ $f(b_2) > 0$

CONTINUO COSÌ: se non mi fermo mai (non incontro mai un punto c_n in cui $f(c_n) = 0$) $\Rightarrow$ TROVO DUE SUCCESSIONI $\{a_n\}, \{b_n\}$ CON LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

(I) $a_n \le a_{n+1},\ a_n \le b_n,\ b_n \ge b_{n+1}$ (perché $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$)

(II) $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \dots = \frac{1}{2^n}(b-a)$

(III) $f(a_n) < 0,\quad f(b_n) > 0$

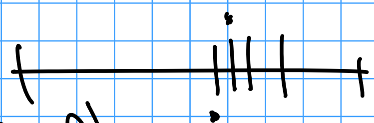
Per (I), sia $\{a_n\}$ che $\{b_n\}$ ammettono limite $a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$

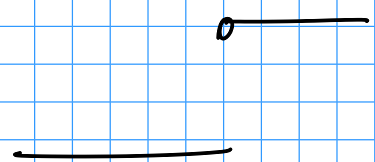
e si ha $a \le \alpha \le \beta \le b$

Per la (II) trovo $\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} \text{ "=" } \frac{b-a}{\infty} = 0$

DUNQUE $\alpha = \beta$ ← LO CHIAMO x e quindi

$a_n \to x \qquad b_n \to x$





DICO CHE $f(x)=0$ (USO LA CONTINUITÀ DI f)

Dato che $a_n \to x$ e f è continua $\Rightarrow f(a_n) \to f(x)$,
siccome $f(a_n) < 0 \Rightarrow f(x) \le 0$.
Dato che $b_n \to x$ e f è continua $\Rightarrow f(b_n) \to f(x)$,
siccome $f(b_n) > 0 \Rightarrow f(x) \ge 0$

$f(x) \geq 0$ e $f(x) \leq 0$ $\iff$ $\boxed{f(x)=0}$

CONSEGUENZE DEL TEOR. ZERI

TEOREMA Se $f : A \to \mathbb{R}$ continua in A, allora

$I \subset A$, I intervallo $\Rightarrow$ $f(I)$ è un intervallo

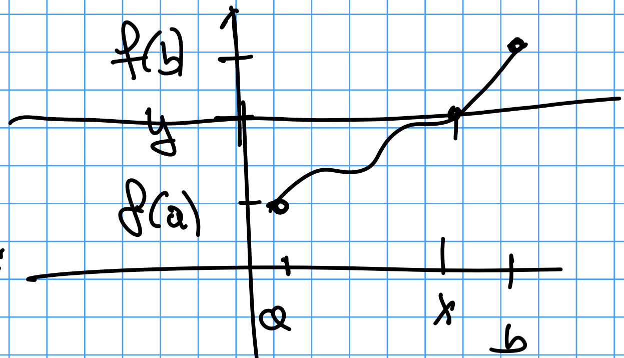
(f continua trasforma intervalli in intervalli)

TEOREMA (DEI VALORI INTERMEDI) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

se $y \in \mathbb{R}$ e $f(a) < y < f(b)$, allora esiste $x \in [a,b]$ in cui $f(x) = y$ (se $y=0$ ho IL TEOR. DEGLI ZERI)

f assume tutti i valori tra $f(a)$ ed $f(b)$

"f assume il valore y" = "$\exists x : f(x) = y$"



Dim. Se definisco $g(x) = f(x) - y$ ho che:

- g è continua (differenza di continue)
- $g(a) = f(a) - y < 0$, $g(b) = f(b) - y > 0$

Posso applicare il T. ZERI a $g \Rightarrow \exists x : g(x) = 0$. MA

$$g(x) = 0 \iff f(x) - y = 0 \iff \boxed{f(x) = y}$$

DIM WEIERSTRASS. f continua su $[a,b] \Rightarrow \exists \max_{[a,b]} f$

(il min si fa analogamente)

CERCO UN PUNTO $\bar{x} \in [a,b]$, tale che $f(\bar{x}) = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$

DISCORSO PRELIMINARE ANCHE SE NON È DETTO CHE $\sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f$

COMUNQUE VALE CHE: se $a < c < b$ allora

$$\sup_{[a,b]} f = \sup_{[a,c]} f \quad \text{OPPURE} \quad \sup_{[a,b]} f = \sup_{[c,b]} f$$

(NO DIM — SI RICAVA DALLA DEF. DI SUP)

PER LA DIM. FACCIAMO DI NUOVO LA BISEZIONE. Sia $M = \sup_{[a,b]} f$

chiamo $a_0 = a$ $b_0 = b$; prendo $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$

CI SONO DUE CASI (NON ESCLUSIVI – POTREBBERO ESSERE VERI ENTRAMBI)

$M = \sup_{[a, c_0]} f \Rightarrow$ prendo $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$

$M = \sup_{[c_0, b]} f \Rightarrow$ prendo $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$

RIPARTO DA $[a_1, b_1]$, prendo $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ e

se $M = \sup_{[a_1, c_1]} f \Rightarrow$ prendo $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$

se $M = \sup_{[c_1, b_1]} f \Rightarrow$ prendo $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$

ITERANDO TROVO $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che

(I) $a \leq a_n \leq b_n \leq b$, $a_{n+1} \geq a_n$, $b_{n+1} \leq b_n$

(II) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

(III) $\sup_{[a_n, b_n]} f = M$

(M potrebbe – per quanto ne sappiamo – essere $+\infty$)

Ragionando come nell'altro teorema trovo che c'è un $x \in [a,b]$ tale che $a_n \to x$, $b_n \to x$.

DIMOSTRO ORA CHE $f(x) = M$, CIOÈ x È IL PUNTO DI MAX.

(a) DICO CHE $M \left(= \sup_{[a,b]} f \right) < +\infty$. Se lo fosse avrei:

$$\sup_{[a_n, b_n]} f = +\infty \quad \text{per ogni } n.$$

Ma allora dato $n \in \mathbb{N}$ potrei trovare $x_n \in [a_n\ b_n]$ con

$f(x_n) > n$ (usando la caratterizzazione di $\sup_A f = +\infty$)

Ho costruito una successione $\{x_n\}$ tale che

$$a_n \le x_n \le b_n \implies x_n \to x$$

$$n \le f(x_n) \implies f(x_n) \to +\infty \longleftarrow \text{ASSURDO}$$

MA essendo f continua in x deve essere $f(x_n) \to f(x) \in \mathbb{R}$

ASSURDO PER L'UNICITÀ DEL LIMITE.

DUNQUE $M = \sup_{[0,b]} f$ è FINITO

(b) Allora abbiamo: $\forall n$ $\sup_{[a_n, b_n]} f = M \in \mathbb{R}$

Per le proprietà del sup, $\forall n$ posso trovare $x_n \in [a_n, b_n]$ con

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$$

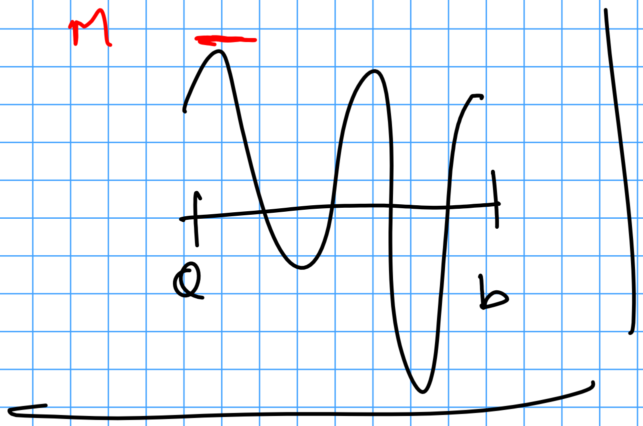
Ho costruito una successione $\{x_n\}$ tale che

- $a_n \leq x_n \leq b_n \Rightarrow x_n \to X$
- $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M \Rightarrow f(x_n) \to M$
- Per la continuità di $f \Rightarrow f(x_n) \to f(X)$

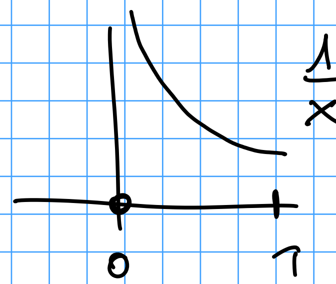
UNIC. DEL LIMITE

NE DEDUCO $f(X) = M$ $\left(= \sup_{[0,b]} f \right)$

FINE



SE NON CI SONO TUTTE LE IPOTESI IL TEOREMA NON VALE

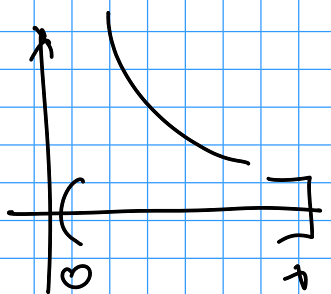


(1) f non continua

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

f NON HA MAX IN $[0,1]$ $\left(f(x)\to\infty \text{ se } x\to 0^+\right)$

(2) L'INTERVALLO NON È CHIUSO / NON È LIMITATO

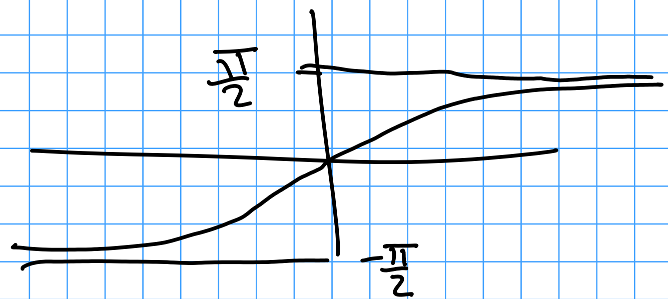


$f(x)=\frac{1}{x}$ È CONTINUA SU $]0,1]$

MA NON HA MAX SU $]0,1]$

$f(x)=\arctan(x)$ su $\mathbb{R}$

è continua, ma non ha max



$\sup_{\mathbb{R}} f=\frac{\pi}{2}$ MA NON CI SONO

$x\in\mathbb{R}$ PER CUI $\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$