Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 15, 23 novembre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

LIMITI DI FUNZIONI

Possiamo "tradurre" vari risultati visti per le successioni trovando nuovi "limiti notevoli" per funzioni

- $$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = 1/2$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{\log_A(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(A)} \quad (A>0 \; A \neq 1)$$

$\ln(x) = \log_e(x)$ dove e è la costante di Nepero

Tutti questi limiti si ricavano dagli analoghi risultati visti per le successioni ricordiamo che (visto anche la volta scorsa)

$$\log_A = \frac{\ln(x)}{\ln(A)} \Rightarrow$$

$$\frac{\log_A(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(A)} \frac{\ln(1+x)}{x} \to \frac{1}{\ln(A)}$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{A^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\ln A^x} - 1}{x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{(\ln A)x} - 1}{\ln(A) x} \cdot \ln(A) = \left(\begin{array}{l} \text{cambio di} \\ \text{variabile} \\ y = (\ln A) \cdot x \end{array} \right)$$

$$\lim_{y \to 0} \underbrace{\frac{e^y - 1}{y}}_{\text{tende a } 1} \cdot \ln(A) = \ln(A)$$

DUNQUE $$\lim_{x \to 0} \frac{A^x - 1}{x} = \ln(A) \quad \text{se } A > 0$$

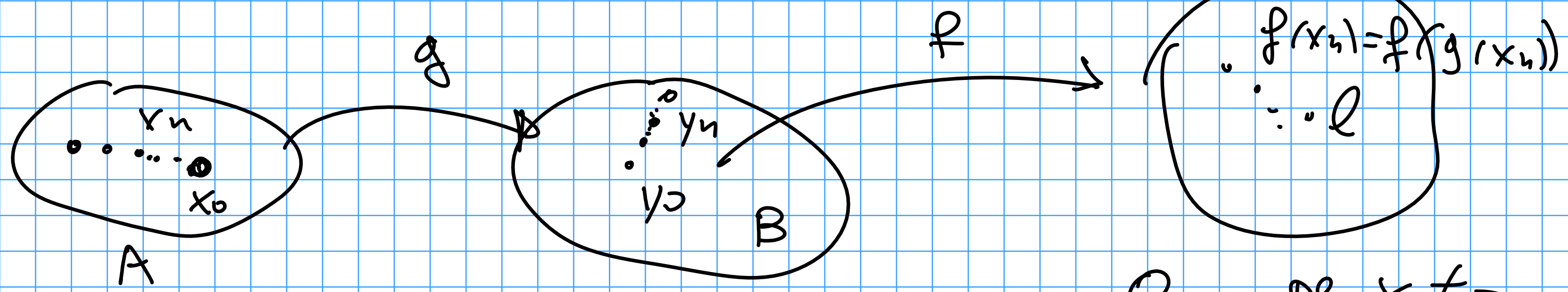
NELL'ULTIMO LIMITE HO USATO IL SEGUENTE TEOREMA

<u>TEOREMA</u> Siano $f: B \to \mathbb{R}$, y_0 pto di acc. per B. e $\lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$

Sia $g: A \to B$, x_0 pto di acc. per A

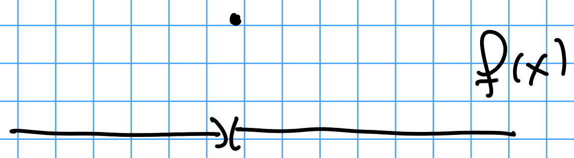
$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ E ✪ $\boxed{g(x) \neq y_0 \text{ per } x \neq x_0}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \ell$$



<u>NOTA</u>

• Se considero $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$



$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

• Se per $g(x) = 0 \ \forall x$ trovo $f(g(x)) = f(0) = 1$

e allora $\lim_{x \to 0} f(g(x)) = 1 \neq 0$

QUINDI SENZA ✪ IL TEOREMA È FALSO.

NEL CASO DI PRIMA AVEVO $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax}$

e ho posto $y = ax$, DUNQUE HO APPLICATO IL TEOREMA CON

$$g(x) = ax \qquad f(y) = \frac{e^y - 1}{y}$$

(NOTA CHE $a \neq 0$ e $ax \to 0$, $ax \neq 0$, $\cancel{a}x \neq 0$)

Dato che $\displaystyle\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} = 1$

$$\left(\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a \right)$$

NELLO STESSO MODO SI DIMOSTRA

- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = a \lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = a$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1 + ax)^{\alpha} - 1}{x} = a\alpha$ e così via...
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1 \qquad (y = x^2 = g(x))$

e quindi $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot x = 1 \cdot 0 = 0$

- $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1 \qquad \left(\begin{array}{l} x = 1 + y \\ y = x - 1 = g(x) \end{array} \right)$

TUTTE CONSEGUENZE DEL CAMBIO DI VARIABILE

Dimostriamo il cambio di variabile

DEVO DIMOSTRARE CHE: se (x_n) è una successione in $A \setminus \{x_0\}$ tale che $x_n \to x_0$ $\Longrightarrow$ $f(g(x_n)) \to \ell$

IO SO CHE $y_n := g(x_n) \to y_0$ $\left(\text{perché } \lim_{x \to x_0} g(y) = y_0\right)$

e per (★) $\boxed{y_n = g(x_n) \neq y_0}$, e $y_n \in B$

DUNQUE $f(y_n) \to \ell$ $\left(\text{perché } \lim_{y \to y_0} f(y) = \ell\right)$

MA $f(y_n) = f(g(x_n)) \to \ell$ QUELLO CHE VOLEVO DIMOSTRARE

ALTRI LIMITI "DA SAPERE" $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \geq 0)$

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{A^x}{|x|^\alpha} = +\infty$ se $A > 1$

(2) $\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha A^x = 0$ se $A > 1$

(3) $\lim_{x \to +\infty} |x|^\alpha A^x = 0$ se $0 < A < 1$

(4) $\lim_{x \to -\infty} \frac{A^x}{|x|^\alpha} = +\infty$ se $0 < A < 1$

Il primo l'abbiamo visto la volta scorsa (riconducendo il limite a $\lim_{n \to \infty} \frac{A^n}{n^\alpha}$ e ...)

GLI ALTRI SI RICONDUCONO AL PRIMO:

(3) $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha A^x = \frac{1}{\lim_{x \to \infty} \frac{(1/A)^x}{x^\alpha}} = \frac{1}{\infty} = 0$ $\left(x^\alpha A^x = \frac{x^\alpha}{(1/A)^x} \right)$

(2) e (4) si riconducono a (1) e (3) col cambio di variabile $y = -x$; per esempio

(2) $\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha A^x = \lim_{y \to +\infty} |y|^\alpha A^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{|y|^\alpha}{A^y} = \frac{1}{\infty} = 0$

se $A > 1$, l'esponenziale A^x diverge più velocemente di qualunque potenza.

sia $\alpha > 0$

(5) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ (qualunque sia α)

(la potenza va all'infinito più velocemente del logaritmo — NON IMPORTA quanto basso sia l'esponente)

Per fare questo limite pongo $y = e^x$; se $x \to \infty \Rightarrow y \to +\infty$

Uso il cambio di variabile e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(e^y)}{(e^y)^\alpha} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} =$$

$$\frac{1}{\alpha} \lim_{y\to+\infty} \frac{\alpha y}{e^{\alpha y}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{z\to\infty} \frac{z}{e^z} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\infty} = 0$$

NELLO STESSO MODO TROVO

(6) $$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$$

DUNQUE IL LOGARITMO PERDE CON LE POTENZE.

ULTIMO ESEMPIO

P / Q polinomi

$x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

(1) SE $x_0 = \pm\infty$ DEVO GUARDARE I TERMINI DI

GRADO MASSIMO. CIOÈ SE

$$P(x) = a\,x^N + \text{termini di grado} < N \qquad a \neq 0$$
$$Q(x) = b\,x^M + \text{termini di grado} < M \qquad b \neq 0$$

VIENE (STESSO DISCORSO FATTO PER LE SUCCESSIONI)

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{b} \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} x^{N-M} = \ldots$$

BANALE MA CI SONO VARI CASI

per esempio $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - x}{1 - x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{-1}\right) \frac{x^2}{x} =$

$$-3 \lim_{x \to -\infty} x = \boxed{+\infty}$$

(2) Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e se $Q(x_0) \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

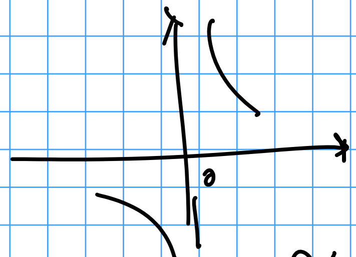
(3) Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $Q(x_0) = 0$, $P(x_0) \neq 0$

Allora il limite viene "INFINITO"

(che può essere diverso a seconda che $x \to x_0^+$ / $x \to x_0^-$)

per esempio $\lim_{x\to 0} \frac{1+x^2}{x}$ ← NON ESISTE, MA

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^2}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \;\Big/\; \lim_{x\to 0^-} \frac{1+x^2}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$



(4) $x_0 \in \mathbb{R}$, $Q(x_0) = 0$, $P(x_0) = 0$??

DATO CHE P e Q sono polinomi $\Rightarrow$ devono contenere entrambi il fattore $(x-x_0)$, cioè

$$P(x) = (x-x_0)^{m_1} P_1(x), \quad P_1(x_0) \neq 0$$
$$Q(x) = (x-x_0)^{n_1} Q_1(x), \quad Q_1(x_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \cdot (x-x_0)^{m_1-n_1}$$

MI RICONDUCO AI CASI PRECEDENTI

ESEMPIO

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{1-x^3} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1+x}{1+x+x^2} = \frac{2}{3}$$

I LIMITI NOTEVOLI CHE ABBIAMO VISTO CI DICONO CHE CERTE FUNZIONI "SOMIGLIANO" A DEI POLINOMI (VICINO A $x_0=0$).

POSSIAMO ANCHE RIFARE PER LE FUNZIONI TUTTI I DISCORSI SUGLI O-PICCOLI / O-GRANDI

IN QUESTO CASO VA FISSATO x_0 (che nel caso delle successioni era $+\infty$)

DUNQUE SUPPONIAMO x_0 FISSATO (di solito $x_0=0$)

DEF. (a) Dico che $f \simeq g$ (per $x \to x_0$) se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

(b) Dico che $f = o(g)$ [o-piccolo di g] se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(c) Dico che $f = O(g)$ se $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ è limitato vicino a x_0

FATTI (gli stessi che valgono per le succ.)

(1) $f \simeq g \iff f = g + o(g) \iff g = f + o(f)$

$\iff f = g(1 + o(1))$

(2) se $f = o(g) \implies f = O(g)$

(3) $o(g) + o(g) = o(g)$ (se $f = o(g)$, $f_1 = o(g) \implies f + f_1 = o(g)$)

ANALOGAMENTE

$$O(g) + o(g) = O(g)$$

$$O(g) + O(g) = O(g)$$

(4) $o(g_1) \cdot o(g_2) = o(g_1 \cdot g_2)$ (se $f_1 = o(g_1)$ e se $f_2 = o(g_2)$, allora $f_1 \cdot f_2 = o(g_1 g_2)$)

ANALOGAMENTE

$$o(g_1) O(g_2) = o(g_1 g_2)$$

$$O(g_1) O(g_2) = O(g_1 g_2)$$

(5) $o(o(g)) = o(g)$ (se $h = o(g)$ e se $f = o(h)$, allora $f = o(g)$)

ANALOGAMENTE

$$O(o(g)) = o(g)$$

$$o(O(g)) = o(g)$$

$$O(O(g)) = O(g)$$

QUESTE PROPRIETÀ DI SOLITO BASTANO PER FARE UN BEL PO' DI LIMITI...

Per esempio potevo fare così

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+o(x))^2}{x} =$$

(perché $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \sin x \simeq x \Leftrightarrow \sin x = x + o(x)$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2x\, o(x) + o(x)\cdot o(x)}{x} = \lim \frac{x^2 + \underbrace{o(2x^2)}_{= o(x^2)} + o(x^2)}{x} = \lim \frac{x^2 + o(x^2)}{x}$$

$$x + o\left(\frac{x^2}{x}\right) = x + o(x) = x\left(1+\alpha(x)\right) \to 0$$

(quando si fa un pò di pratica si scrive semplicemente

$$\frac{\sin(x^2)}{x} = \frac{x^2 + o(x^2)}{x} = x + o(x) \to 0$$