# Analisi Matematica I

## prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 14, 17 novembre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

RIEPILOGO (CON QUALCHE INTEGRAZIONE) SUGLI o-PICCOLI

DATE $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni

Def.

- $a_n \simeq b_n$ se $\frac{a_n}{b_n} \to 1$
- $a_n = o(b_n)$ se $\frac{a_n}{b_n} \to 0$
- $a_n = O(b_n)$ se $\frac{a_n}{b_n}$ è limitato (O GRANDE)

FATTI VARI

- $a_n \simeq b_n \iff a_n = b_n + o(b_n) \iff a_n = b_n(1+o(1))$

(scrivere $1+o(1)$ vuol dire scrivere qualcosa che tende a $1$)

- se $a_n = o(b_n) \Rightarrow a_n = O(b_n)$ (se $\frac{a_n}{b_n} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n}$ è limitato)

se $a_n \simeq b_n \Rightarrow a_n = O(b_n)$ / $b_n = O(a_n)$

- (SOMME)

$$\boxed{o(b_n) + o(b_n) = o(b_n)}$$

questo significa che: se $a_n = O(b_n)$ e $a'_n = o(b_n)$, allora la somma $a_n + a'_n = O(b_n)$

CIO' SEGUE DA $\frac{a_n + a'_n}{b_n} = \underset{\downarrow\, 0}{\frac{a_n}{b_n}} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{a'_n}{b_n}} \longrightarrow 0$

$$\boxed{O(b_n) + O(b_n) = O(b_n)}$$

se $a_n = O(b_n)$, $a'_n = O(b_n) \Rightarrow a_n + a'_n = O(b_n)$: si vede subito

NE SEGUE $\boxed{o(b_n) + O(b_n) = O(b_n)}$

(e non si può pretendere che venga $o(b_n)$:

$$\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \frac{2}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \text{ allora}$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{MA NON E' } o\left(\frac{1}{n}\right)$$

(PRODOTTI) $\boxed{O(b_n) \cdot O(b'_n) = O(b_n b'_n)}$

se $a_n = O(b_n)$ e $a'_n = O(b'_n) \Rightarrow \frac{a_n a'_n}{b_n b'_n} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)\left(\frac{a'_n}{b'_n}\right)$ LIMITATO

IN QUANTO PRODOTTO DI DUE SUCCESSIONI LIMITATE

$$\boxed{o(b_n)\cdot O(b'_n) = o(b_n b'_n)}$$

Se $a_n = o(b_n)$ e $a'_n = O(b'_n)$ $\Rightarrow$ $\frac{a_n a'_n}{b_n b'_n} = \underbrace{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)}_{\to 0}\underbrace{\left(\frac{a'_n}{b'_n}\right)}_{\text{LIMITATO}} \to 0$

NE SEGUE: $\boxed{o(b_n)\cdot o(b'_n) = o(b_n b'_n)}$

("COMPOSIZIONE")

$$\boxed{\begin{array}{lll} (1) & O(O(b_n)) = O(b_n) \\ (2) & o(O(b_n)) = o(b_n) \\ (3) & O(o(b_n)) = o(b_n) \\ (4) & o(o(b_n)) = o(b_n) \end{array}}$$

Vediamo la seconda (per es.). IL SIGNIFICATO DI

$o(O(b_n)) = o(b_n)$ È

se $a_n = O(b_n)$ e $a'_n = o(a_n)$ $\Rightarrow$ $a'_n = o(b_n)$

QUESTO È VERO PERCHÉ

$$\frac{a'_n}{b_n} = \underbrace{\frac{a'_n}{a_n}}_{\downarrow \atop 0} \underbrace{\frac{a_n}{b_n}}_{\text{LIMITATO}} \longrightarrow 0$$

---

VEDERE LA LISTA DI LIMITI IN RETE !

---

# LIMITI DI FUNZIONI

SITUAZIONE : $f : A \to \mathbb{R}$ dove $A \subset \mathbb{R}$

(DEVO AMMETTERE FUNZIONI CHE HANNO DOMINIO $A \neq \mathbb{R}$)

DI SOLITO $A$ = INTERVALLO / UNIONE DI INTERVALLI

DOVE PER INTERVALLO INTENDO UN INSIEME :

$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ / $\{a < x \leq b\}$ / $\{a \leq x < b\}$ / $\{a < x < b\}$

e dove $a \leq b$ sono in $\overline{\mathbb{R}}$ (quando gli estremi sono infiniti non si mette "=" : GLI INTERVALLI NON CONTENGONO $\pm\infty$)

che indico con $[a,b]$ / $]a,b]$ / $[a,b[$ / $]a,b[$ .

**DEF** Sia dato $A \subset \mathbb{R}$ . e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ .

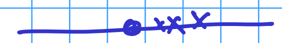
Dico che $x_0$ , è punto di accumulazione per A
SE ESISTE UNA SUCCESSIONE $\{x_n\}$ tale che

$$x_n \in A \quad \forall n, \quad \underline{x_n \neq x_0} \quad \forall n, \quad x_n \to x_0$$

I punti di accumulazione per A sono quei punti che si possono approssimare arbitrariamente con punti di A , <u>DIVERSI dal</u> pto stesso.

<u>ESEMPIO</u> • Se $A = ]0,1[$ , i punti di accumulazione formano l'insieme $[0,1]$

Per esempio . $\frac{1}{2}$ è limite di $\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}$



• $1$ è limite di $1 - \frac{1}{2^n}$

• Se $A = \mathbb{N}$ , allora l'unico punto di acc. è $+\infty$

<u>INFATTI</u> • $+\infty$ è limite della succ. $\{a_n\} = \{n\}$

DUNQUE $+\infty$ è di accumulazione

• VICEVERSA SUPPONIAMO CHE $\{x_n\}$ sia una successione

di numeri interi, con $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}$.
APPLICANDO LA DEF. DI LIMITE CON $\varepsilon = 1/4 \Rightarrow$

DEFINITIVAMENTE $x_0 - \frac{1}{4} < x_n < x_0 + 1/4$

quindi $x_n$ è contenuto nell'intervallo $]x_0 - 1/4, x_0 + 1/4[$

che è lungo $1/2$. DENTRO QUESTO INTERVALLO

C'È AL PIÙ UN NUMERO INTERO $m$. DATO CHE $x_n \in \mathbb{N}$

DEVE ESSERE $x_n = m = x_0$ DEFINITIVAMENTE

Se $x_n \to x_0$, $x_n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ DEFINITIVAMENTE $x_n = x_0 \in \mathbb{N}$

QUINDI $x_0 \in \mathbb{R}$ NON PUÒ ESSERE DI ACCUMULAZIONE

DEF. (LIMITE) Data $f: A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}$, dato $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

$x_0$ pto di accumulazione per $A$, dato $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$:

DICO CHE

il limite di $f(x)$ per $x$ che tende a $x_0$ è $\ell$

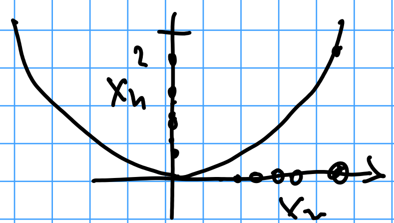
e scrivo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ SE

PER OGNI SUCCESSIONE $\{x_n\}$ IN $A$, CON $x_n \neq x_0$ $\forall n$

e $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ SI HA $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$

<u>PER ESEMPIO</u> $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ SIGNIFICA CHE

PER QUALUNQUE $x_n$ con $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ SI HA $(x_n)^2 \to 0$




• $\lim_{x \to \infty} 2^x = +\infty$ VUOL DIRE CHE

SE $x_n \to +\infty$ $\Rightarrow$ $2^{x_n} \to +\infty$

<u>DIM.</u> (mi ricollego a $\lim_{n \to \infty} 2^n = +\infty$, USANDO CHE $x \mapsto 2^x$ CRESCE)

Sia $\{x_n\}$ tale che $x_n \to +\infty$ $\Rightarrow$ $[x_n] \geq x_n - 1 \to +\infty$

Allora $2^{x_n} \geq 2^{[x_n]}$ MA $\lim_{n \to \infty} 2^{[x_n]} = \lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

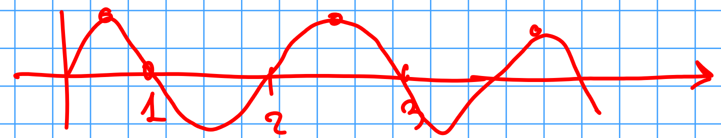
(per un teorema "tipo succ. estratte" che abbiamo visto!

**NOTA** IN GENERALE $\lim_{n\to\infty} f(n)$ può esistere senza che

esista $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ⊛

Nell'esempio precedente in cui $f(x) = 2^x$ HO USATO LA MONOTONIA DI $f$.

⊛ $f(x) = \sin(\pi x)$




è chiaro che $\lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = 0$

MA $\lim_{x\to\infty} \sin(\pi x)$ NON ESISTE. INFATTI se

$\boxed{x_n = \frac{1}{2} + 2n}$ $\Rightarrow$ $x_n \to +\infty$ e $\sin(x_n \pi) = 1 \to 1 \neq 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$

**OSS.** La def. data è equivalente a quella tradizionale con gli intorni / $\varepsilon$ e $\delta$ ...

DATA $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0$ DI ACC. PER A

## PROPRIETÀ DEI LIMITI (le stesse viste nel caso delle succ.)

(A) UNICITÀ DEL LIMITE

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$ $\Rightarrow$ $\ell_1 = \ell_2$

(B) MONOTONIA

Se $f(x) \geq 0$, $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$ $\Rightarrow$ $\ell \geq 0$

(C) PERMANENZA DEL SEGNO

Se $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$, $\ell > 0$

ALLORA $f(x) > 0$ per le $x$ di A

con "$x$ vicino a $x_0$", $x \neq x_0$

Con $x$ vicino a $x_0$ INTENDO:

CASO $x_0 \in \mathbb{R}$ — le $x \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[$ per $\delta > 0$ OPPORTUNO

CASO $x_0 = +\infty$ — le $x > K$ per $K$ opportuno

CASO $x_0 = -\infty$ — le $x < K$ per $K$ opportuno

IN GENERALE SI DICE CHE UNA PROPRIETÀ $P(x)$ è vera per "x vicino a $x_0$" se $P(x)$ VALE PER TUTTE LE

$x$ con $x \neq x_0$ e con

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ per $\delta > 0$ OPPORTUNO SE $x_0 \in \mathbb{R}$

$x > K$ per $K$ opportuno SE $x_0 = +\infty$

$x < K$ per $K$ opportuno se $x_0 = -\infty$

NOTA "DEFINITIVAMENTE" $\Leftrightarrow$ "VICINO A $+\infty$"

Per es: $f(x) = x^2 - 1$ è $> 0$ vicino a $+\infty$

$< 0$ vicino a zero

(D) CONFRONTO (DUE CARABINIERI)

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per $x$ vicino a $x_0$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0} h(x)$ ALLORA

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

VEDIAMO ALCUNE DELLE DIM.

(A) (unicità del limite)

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \Rightarrow$ per ogni $x_n$ con $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ deve essere $f(x_n) \to \ell_1$

Analogamente se ci fosse un altro limite $\ell_2$ $\Rightarrow$ per ogni $x_n$ con $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ dovrebbe essere $f(x_n) \to \ell_2$

SE PRENDO UNA QUALUNQUE DI TALI $x_n$ (ce ne sono perché $x_0$ è di accum.)

trovo $f(x_n) \to \ell_1$, $f(x_n) \to \ell_2$

DATO CHE IL LIMITE DI SUCCESSIONI È UNICO $\Rightarrow \ell_1 = \ell_2$

(C) (permanenza del segno) CASO $x_0 \in \mathbb{R}$

Sia $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x) > 0$. SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE

NON SIA VERO "$f(x) > 0$ per $x$ VICINO A $x_0$"

$\Updownarrow$

È FALSO CHE "$\exists\, \delta > 0$ PER CUI $f(x) > 0$ $\forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $x \neq x_0$"

QUESTO CORRISPONDE A

$\forall \delta > 0 \quad \exists\, x_\delta$ CON $x_\delta \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\,$, $x_\delta \neq x_0$, $f(x_\delta) \leq 0$

(per quanto mi avvicini a $x_0$, trovo sempre punti in cui $f \leq 0$)

SCELGO $\delta = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ TROVO $x_n$ tale che

$x_n \neq x_0$, $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$ e $f(x_n) \leq 0$

QUESTE $x_n$ FORMANO UNA SUCC. tale che

$x_n \to x_0$, $\quad x_n \neq x_0 \quad$ e $f(x_n) \leq 0$

PER LA DEF. DI LIMITE (per funzioni) DEVE ESSERE

$f(x_n) \to \ell \qquad (f(x_n) \leq 0)$

ALLORA (per i teoremi sulle succ.) $\ell \leq 0$ ASSURDO

---

(E) SOMMA / PRODOTTI / QUOZIENTI

$f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0$ di acc. per A

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$

ALLORA

$$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = \ell_1+\ell_2$$

$\boxed{\text{LIMITATA + INFINITA = INFINITA}}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \ell_1\cdot\ell_2$$

IN PIÙ

$\boxed{\text{INFINITESIMA} \times \text{LIMITATA} = \text{INFINITESIMA}}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell_1} \quad \text{se } \ell_1 \neq 0$$

QUESTI RISULTATI SI ESTENDONO AI CASI $\infty$ CHE RIENTRANO NELLA "TABELLA" VISTA PER LE SUCC.

PER I RECIPROCI BISOGNA INTRODURRE ANCHE PER LE FUNZIONI i limiti a $\ell^+ / \ell^-$ DICENDO

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell^+ / \ell^- \quad \text{SE} \begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \text{E INOLTRE} \\ f(x) > \ell \;/\; f(x) < \ell \\ \text{VICINO A } x_0 \end{cases}$$

QUINDI POSSO USARE: $\frac{1}{0^+} = +\infty \;/\; \frac{1}{0^-} = -\infty \;/\; \frac{1}{+\infty} = 0^+ \;/\; \frac{1}{-\infty} = 0^-$

DIM della somma (SCHEMA CHE VALE ANCHE NEGLI ALTRI CASI)

So che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$

Per dim. che $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \ell_1 + \ell_2$

prendo una qualunque $\{x_n\}$ in $A \setminus \{x_0\}$ che tende a $x_0$

e calcolo $\lim_{n \to \infty} \left( f(x_n) + g(x_n) \right) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) + \lim_{n \to \infty} g(x_n)$

(TEOR. SULLE SUCCESSIONI) $= \ell_1 + \ell_2$

Dato che $\{x_n\}$ è arbitraria Ho VERIFICATO LA DEF. DI LIMITE PER FUNZIONI

---

LIMITI DESTRO E SINISTRO PER $f$ IN UN $x_0 \in \mathbb{R}$

Def. $x_0$ si dice pto di occ. da destra (sinistra) per $A$ se esiste $x_n$ in $A$ tale che $x_n > x_0$ ($x_n < x_0$), $x_n \to x_0$

Es. Se $A = ]0, 1[$, i pti di occ. da destra (sinistra) FORMANO $[0, 1[$ ($]0, 1]$)

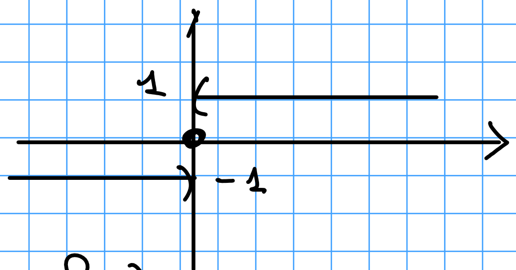
Def. Se $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0$ è di acc. destro (sinistro), dico che $l = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ $\left( \lim_{x \to x_0^-} f(x) \right)$ se

per ogni successione $\{x_n\}$ in $A$, con $x_n > x_0$ $(x_n < 0)$, $x_n \to x_0$ si ha $f(x_n) \to l$

GUARDO SOLO I PUNTI A DESTRA (A SINISTRA)

ESEMPIO

$$f(x) = \text{segno}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



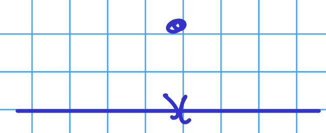

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

A PROPOSITO DI $x_0$. CON LA DEFINIZIONE FATTA:

- NON È NECESSARIO CHE $x_0 \in A$, cioè NON È NECESSARIO CHE ESISTA $f(x_0)$
- ANCHE SE $x_0 \in A$ e quindi $f(x_0)$ ESISTE TALE VALORE NON HA <u>NESSUNA</u> INFLUENZA SUL LIMITE $\lim_{x \to x_0} f(x)$

Se non avessimo tolto $x_0$ nella definizione, allora la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



NON AVREBBE LIMITE per $x \to 0$.

CON LA DEFINIZIONE FATTA, INVECE, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

<u>TEOREMA</u> ($f: A \to \mathbb{R}$, $x_0$ è di acc. sia da destra che da sinistra per $A$). ALLORA SONO EQUIVALENTI

(a) esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(b) esistono $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e sono entrambi $= \ell$

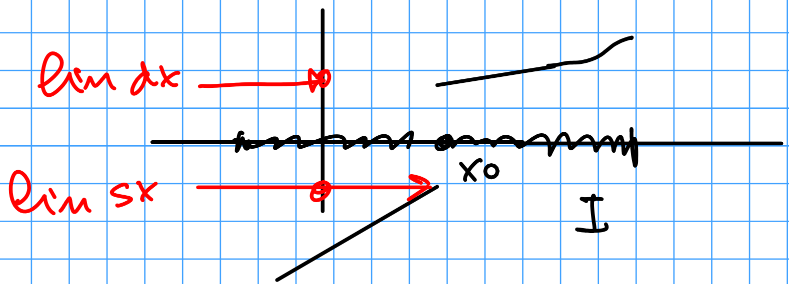
(NO DIM.)

**TEOREMA** Se $f: I \to \mathbb{R}$, $I$ INTERVALLO, $f$ MONOTONA

(a) Se $x_0$ è di acc. da destra $\Rightarrow$

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x) \quad \text{CASO } f \text{ CRESCENTE}$$

$$\sup_{x > x_0} f(x) \quad \text{CASO } f \text{ DECRESCENTE}$$




(b) se $x_0$ è di acc. da sinistra $\Rightarrow$

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \quad \text{CASO } f \text{ CRESCENTE}$$

$$\inf_{x < x_0} f(x) \quad \text{CASO } f \text{ DECRESCENTE}$$

DUNQUE se $x_0 \in \,]a,b[$ ($a,b$ estremi di $I$)

$$\Rightarrow \quad -\infty < \lim_{x \to x_0^-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x \to x_0^+} f(x) < +\infty \quad (f \text{ CRESCENTE})$$

(nel caso decrescente ai scambio ~~fatto~~ )

se limite esiste ⇒ deve essere $f(x)$

(NO DIM)

---

QUALCHE ESERCIZIO DELLA LISTA (lim di succ.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4^n+1}-\sqrt{3^{2n}-n^4}}{3^n-2^n} \qquad (n.\ 51) \qquad \left(\frac{+\infty-\infty}{+\infty-\infty}\right)$$

NOTA $3^{2n} = (3^2)^n$ / $4^n = (2^2)^n = (2^n)^2$

$$\frac{\sqrt{4^n+1}-\sqrt{9^n-n^4}}{3^n-2^n} = \frac{2^n\sqrt{1+\underbrace{o(1)}_{1/4^n}}-3^n\sqrt{1+\underbrace{o(1)}_{-n^4/9^n}}}{3^n-2^n} =$$

$$\frac{\cancel{3^n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\overbrace{(1+o(1))}^{\sqrt{1+o(1)}}-\overbrace{(1+o(1))}^{\sqrt{1+o(1)}}\right)}{\cancel{3^n}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \frac{\overbrace{o(1)}^{\left(\frac{2}{3}\right)^n}(1+o(1))-1-o(1)}{1+\underbrace{o(1)}_{\left(\frac{2}{3}\right)^n}}$$

$$= \frac{-1+o(1)}{1+o(1)} \longrightarrow -1$$

L'USO DEGLI o-PICCOLI SERVE A NON SCRIVERE!

$$\frac{\sqrt{4^n+1}-\sqrt{9^n-n^4}}{3^n-2^n} = \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n\sqrt{1+\frac{1}{4^n}}-\sqrt{1-\frac{n^4}{9^n}}}{1-\frac{2^n}{3^n}} \to 1$$

(54)

$$\ln(e^n+1)-n = \ln\left(e^n(1+1/e^n)\right)-n =$$

$$\ln(e^n)+\ln(1+1/e^n)-n =$$

$$\cancel{n}+\ln(1+1/e^n)-\cancel{n} = \ln(1+1/e^n) \to \ln(1)=0$$

(NON IL 56)

$$\ln(2e^n+1)-n = \ln\left(2e^n(1+o(1))\right)-n$$

$$= \cancel{\ln(e^n)}+\ln\left(2(1+o(1))\right)-\cancel{n} \to \ln(2)$$

(56)

$$\ln\left((2e)^n+1\right)-n = \ln\left((2e)^n(1+o(1))\right)-n =$$

$$n\ln(2e)+\ln(1+o(1))-n =$$

$$\underbrace{\left(\ln(2e) - 1\right)}_{\ln(2)>0} n + o(1) \to +\infty \quad \text{perché } \ln(2e) > 1$$

$$\ln(2e) = \ln(2) + 1$$

(60)

$$n\left(\log_3(9^n+1) - 2n\right) =$$

$$n\left(\log_3\left(9^n\left(1 + 1/9^n\right)\right) - 2n\right) =$$

$$n\left(\log_3(9^n) + \log_3\left(1 + \frac{1}{9^n}\right) - 2n\right) =$$

$$n\left(\cancel{n \log_3 9} + \log\left(1 + \frac{1}{9^n}\right) \cancel{- 2n}\right) = n \log_3\left(1 + \frac{1}{9^n}\right)$$

$(\infty \cdot 0 \ ??)$ DEVO USARE LA FORMULA TIPO

$$\ln(1 + a_n) = a_n + o(a_n) \qquad (a_n \to 0)$$

PROBLEMA: VALE SE LA BASE È $e$

COSA SUCCEDE DI $\log_A(1 + a_n) = \dfrac{\ln(1+a_n)}{\ln A} = \dfrac{a_n + o(a_n)}{\ln A}$

$$\left( y = \log_A x \iff A^y = x \iff e^{\ln A^y} = x \iff e^{y \ln A} = x \iff y \ln A = \ln x \right.$$

QUINDI $\left. \log_A x = \dfrac{\ln x}{\ln A} \right)$

$$\boxed{\log_A(1+a_n) = \frac{a_n}{\ln A} + o(a_n)}$$

DUNQUE $(A=3)$

$$n \log_{\underset{A}{3}}\left(1+\frac{1}{9^n}\right) = n\left(\frac{1}{9^n}\frac{1}{\ln 3} + o\left(\frac{1}{9^n}\right)\right) = \underset{\downarrow\, 0}{\frac{n}{9^n}} \frac{1}{\ln(3)} + o\left(\frac{n}{9^n}\right)$$

$\longrightarrow 0$