Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 13, 16 novembre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

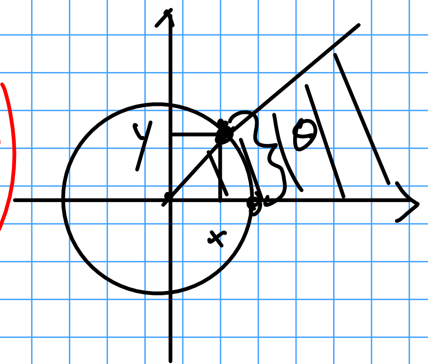
ALTRI LIMITI NOTEVOLI (trigonometrici)

SIA $a_n \to 0$

ALLORA $\sin(a_n) \to 0$

Cosa è $\sin(\theta) = ??$

(PUNTO DI VISTA "GEOMETRICO")



Dato un numero θ

"stacchiamo" un arco lungo x

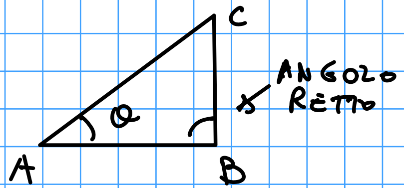
sulla circonferenza unitaria (a partire da $(1,0)$)

Sia (x,y) l'estremo di questo arco

ALLORA $x = \cos(\theta)$ $\quad y = \sin(\theta)$

NOTA Stiamo misurando gli angoli mediante la lunghezza dell'arco corrispondente sulla circ. unitaria.

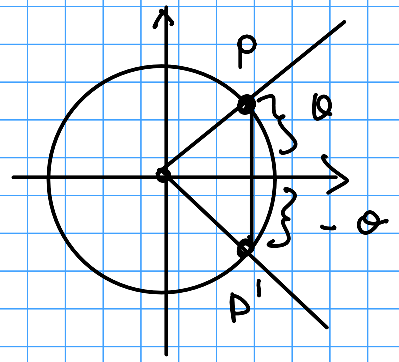
(MISURO GLI ANGOLI IN RADIANTI)



$$\sin(\theta) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

ALLORA



$0 \le \sin(\vartheta) \le \vartheta$ se $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$

$$\overline{PP'} = 2\sin(\theta)$$

lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{PP'} = 2\theta$

DATO CHE IL SEGMENTO È IL PIÙ BREVE $\Rightarrow$

$$\cancel{2}\sin(\theta) \le \cancel{2}\theta$$

ANALOGAMENTE SE $-\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le 0$ trovo la dis. opposta

IN GENERALE $\boxed{|\sin(\vartheta)| \le |\theta| \text{ se } \frac{\pi}{2} \le \vartheta \le -\frac{\pi}{2}}$

DA QUESTO RICAVO CHE, se $\theta_n \to 0 \Rightarrow \sin(\theta_n) \to 0$:

USO I DUE CARABINIERI e trovo

$$-\theta_n \leq \sin(\theta_n) \leq \theta_n \quad \text{(DEFINITIVAMENTE)}$$

A CASCATA: (1) Se $\theta_n \to 0$ $\quad \cos(\theta_n) \to 1$

INFATTI $\quad \cos(\theta_n) = \sqrt{1-\sin^2(\theta_n)}$ (se θ_n vicino a zero)

e dunque $\cos(\theta_n) \to 1$

(2) Se $\theta_n \to \ell \Rightarrow \sin(\theta_n) \to \sin(\ell)$

$\cos(\theta_n) \to \cos(\ell)$

INFATTI

$$\sin(\theta_n) = \sin((\theta_n-\ell)+\ell) =$$

$$\sin(\underbrace{\theta_n}_{\downarrow 0}-\ell)\cos(\ell) + \cos(\underbrace{\theta_n-\ell}_{\downarrow 1})\sin(\ell)$$

DATO CHE $\theta_n - \ell \to 0$ posso usare i limiti precedenti e trovo che $\sin(\theta_n) \to 0\cdot\cos(\ell) + 1\cdot\sin(\ell) = \sin(\ell)$

(e stessi ragionamenti per $\cos(\theta_n)$)

SE $\theta_n \to 0$ $\quad \dfrac{\sin(\theta_n)}{\theta_n} \to 1$ $\quad$ (FORMA INDET. $\frac{0}{0}$)

Per vedere ciò usiamo la dis. $\sin(\vartheta) \le \vartheta$

se $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$: $\frac{\sin(\vartheta)}{\vartheta} \le 1$ se $0 < \vartheta \le \frac{\pi}{2}$

SE INVECE $-\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le 0$ $\sin(\vartheta) \ge \vartheta$

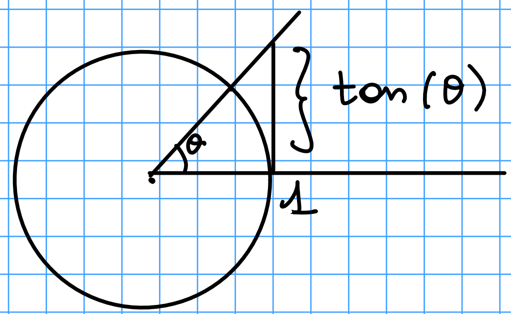
DIVIDENDO PER ϑ (<0) $\Rightarrow$ $\frac{\sin(\vartheta)}{\vartheta} \le 1$ $-\frac{\pi}{2} \le \vartheta < 0$

DUNQUE

$$\boxed{\frac{\sin\vartheta}{\vartheta} \le 1 \quad \text{per i } \vartheta \text{ con } 0 < |\vartheta| < \frac{\pi}{2}}$$

Per fare il limite notevole MI SERVE ORA UNA DIS.
DEL TIPO $\frac{\sin(\vartheta)}{\vartheta} \ge$ qualcosa che tende a 1

TORNIAMO SULLA CIRCONF



NELLA FIGURA SI VEDE

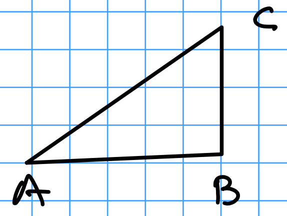
CHE IL TRIANGOLO CONTIENE
IL SETTORE CIRCOLARE $\Rightarrow$

AREA (TRIANG.) $\ge$ AREA (SETT.)

$\uparrow$ $\uparrow$

$\frac{1}{2}\tan(\theta)$ $\qquad$ $\frac{\theta \cdot 1}{2}$

$\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$



$\tan(\theta) = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$

NE VIENE

$$\tan\theta \geq \theta$$

e dividendo $\frac{\tan\theta}{\theta} \geq 1$ se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

SE POI $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, cambio di segno a numeratore e denominatore, OTTENGO LA STESSA DIS.

$1 \leq \frac{\tan\theta}{\theta}$ per $0 < |\theta| < \frac{\pi}{2}$

$\Updownarrow$ (scrivendo $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

$$\boxed{\cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \quad \text{per } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}}$$

Mettendo tutto insieme, e prendendo $\theta = \theta_n$, trovo:

$$\cos(\theta_n) \leq \frac{\sin(\theta_n)}{\theta_n} \leq 1$$

$\cos(\theta_n) \to 1$

PER I CARABINIERI

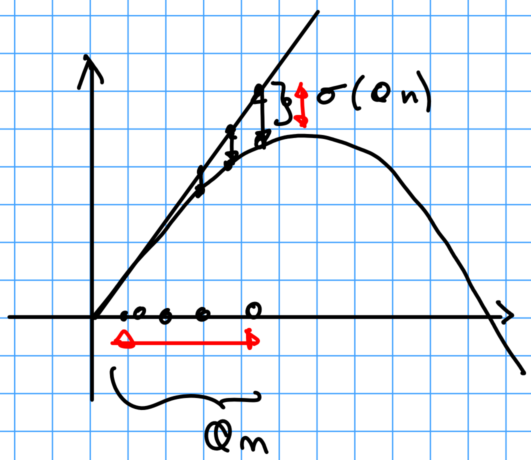
$$\boxed{\frac{\sin(\theta_n)}{\theta_n} \to 1}$$

INTERPRETAZIONI

- $\sin(\theta_n) \simeq \theta_n$

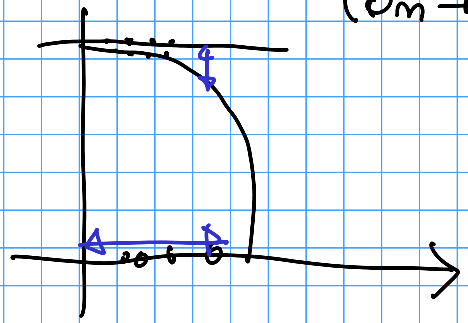
- $\sin(\theta_n) = \theta_n + o(\theta_n)$

dicono esattamente lo stesso cosa che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\theta_n)}{\theta_n} = 1$



• PASSIAMO A ESAMINARE IL COSENO (VICINO A ZERO)

$(a_n \to 0)$



$$\cos(a_n) = 1 + o(1)$$

coso c'è qui dentro ??

sembra che $\cos(a_n) = 1 + o(a_n)$

SÌ (ANZI DI PIÙ)..

SE $a_n \to 0$

VALE

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}}$$

DUNQUE $\cos(a_n) = 1 - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$

(perché, dal limite si ricava $1-\cos(a_n) \simeq \frac{a_n^2}{2}$

$\Leftrightarrow 1-\cos(a_n) = \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)$, cioè)

DIMOSTRIAMO che il limite sopra fa $1/2$. IN EFFETTI:

$$\frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{(1-\cos(a_n))(1+\cos(a_n))}{a_n^2\,(1+\cos(a_n))} =$$

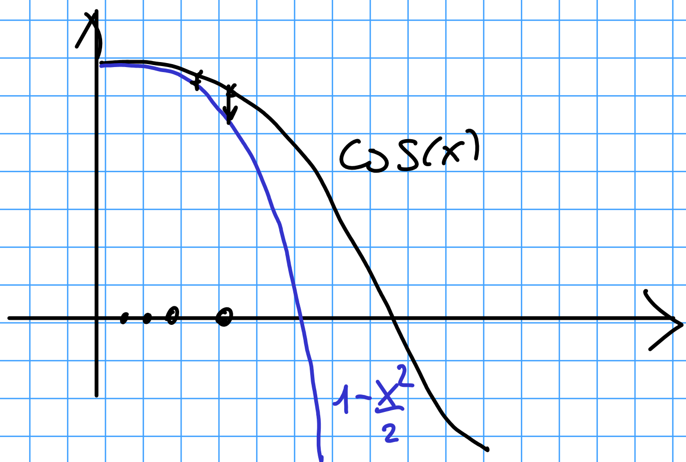
$$\frac{1-\cos^2(a_n)}{a_n^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(a_n)} = \left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)^2 \frac{1}{1+\cos(a_n)}$$

$$\left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)^2 \downarrow 1^2 \qquad \frac{1}{1+\cos(a_n)} \downarrow \frac{1}{1+1}$$

il tutto tende a $\frac{1}{2}$

DUNQUE $\boxed{\cos(a_n) = 1 - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)}$

($\cos(x)$ si approssima con la parabola $1-\frac{x^2}{2}$)



ATTENZIONE $1 - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$ È MEGLIO

di $1 - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n)$

ANZI - se scrivessi $1 - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n)$ sarebbe lo

stesso che scrivere $1 + o(a_n)$

PER ESEMPIO, se $a_n = \frac{1}{n}$ ALLORA:

- $\underbrace{1 + \frac{1}{n^{3/2}}}_{} = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$ INFATTI

$\frac{1}{n^{3/2}} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ perché

$\left(\frac{3}{2} > 1\right)$ $\frac{\frac{1}{n^{3/2}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

NON DICE NULLA

- $1 + \frac{1}{n^{3/2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ VERO

INFATTI $\frac{1}{n^{3/2}} - \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ DATO CHE

$$\frac{\frac{1}{n^{3/2}} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \to 0$$

AGGIUNGERE TERMINI DI ORDINE SUPERIORE AL "CONTENUTO DI $o(\cdot)$" È ININFLUENTE

- NON POSSO DIRE CHE

$$1 + \frac{1}{n^{3/2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

PERCHÉ

$$\frac{1}{n^{3/2}} - \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

È FALSO

dato che $\frac{\frac{1}{n^{3/2}} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \to \infty$

DUNQUE ABBIAMO LA SEGUENTE LISTA:

$(x \quad a_n \to 0)$

- $e^{a_n} = 1 + a_n + o(a_n)$
- $\ln(1+a_n) = a_n + o(a_n)$
- $(1+a_n)^{\alpha} = 1 + \alpha a_n + o(a_n)$
- $\sin(a_n) = a_n + o(a_n)$
- $\cos(a_n) = 1 - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$
- $\tan(a_n) = a_n + o(a_n)$ (basta notare che $\frac{\tan(a_n)}{a_n} \to 1$)

ANALOGAMENTE se $|a_n| \to +\infty$ si ha

- $a_n^{\alpha} = o(A^{a_n})$ se $\underline{A > 1}$ $\left(n^5 = o(2^n)\right)$
- $A^{a_n} = o\left(\frac{1}{a_n^{\alpha}}\right)$ se $0 < A < 1$ $\left(\frac{1}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)$
- $A^n = o(n!)$ $\forall A > 0$
- $n! = o(n^n)$

(le prime due le abbiamo viste quando $a_n = n$, però sono vere per qualunque a_n con $|a_n| \to \infty$)

TUTTI MODI PER ESPRIMERE CHE UN INFINITESIMO È PIÙ VELOCE DI UN ALTRO (O UN INFINITO È PIÙ LENTO)

ALCUNI ESEMPI

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right) n$$

SI TRATTA DI UNA FORMA INDETERMINATO $0 \cdot \infty$
DATO CHE $\sqrt[n]{n} \to 1$ – VISTO A SUO TEMPO –.

SCRIVO $\sqrt[n]{n} = e^{\ln(\sqrt[n]{n})} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$

($\to 1$ perché $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$ CI TORNIAMO DOPO)

$\frac{\ln(n)}{n} = a_n$

DUNQUE

$$\left(\sqrt[n]{n}-1\right)n = n\left(e^{\frac{1}{n}\ln(n)}-1\right) =$$

$$n\left(a_n+1+o(a_n)-1\right) = n\cdot\left(a_n+o(a_n)\right) = n\left(\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$$

(per la formula $e^{a_n} = 1+a_n+o(a_n)$)

$$= \ln(n)+o(\ln(n)) = \ln(n)\left(1+o(1)\right) \to \infty$$

QUINDI $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)n = +\infty$

CON GLI STESSI CALCOLI VEDO CHE

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)n}{\ln(n)} = 1$$

PICCOLA MODIFICA (stessi calcoli)

$$\frac{\left(\sqrt[n]{n^3}-1\right)n}{\ln(n)} = \left(e^{\frac{3}{n}\ln(n)}-1\right)\frac{n}{\ln(n)} =$$

$$\left(\cancel{1}+\frac{3}{n}\ln(n)+o\left(\frac{3}{n}\ln(n)\right)-\cancel{1}\right)\frac{n}{\ln(n)}=$$

$$3+o(1)\to 3$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{CIO' CHE SERVE :}\\ e^{a_n}=1+a_n+o(a_n)\\ \text{se } a_n\to 0 \qquad \star\end{array}}$$

O ANCHE

$$\left(\sqrt[n]{2n^3-3n^2+n+1}-1\right)\frac{n}{\ln(n)}$$

(un po' più complicato – ma sostanzialmente è lo stesso)

$$\left(\sqrt[n]{2n^3-3n^2+n+1}-1\right)\frac{n}{\ln(n)}=$$

$$\left(e^{\frac{1}{n}\ln(2n^3-3n^2+n+1)}-1\right)\frac{n}{\ln(n)}=(\text{USO }\star)$$

$$\left[\cancel{1}+\frac{1}{n}\ln(2n^3-3n^2+n+1)+o\left(\frac{1}{n}\ln(2n^3-3n^2+n+1)\right)\cancel{-1}\right]\frac{n}{\ln(n)}=$$

$$\frac{\ln(2n^3-3n^2+n+1)+o(2n^3-3n^2+n+1)}{\ln(n)}=$$

$$\frac{\ln(2n^3-3n^2+n+1)}{\ln(n)}\left(1+o(1)\right) =$$

$$\frac{\ln\left(2n^3\left(1+o(1)\right)\right)}{\ln(n)}\left(1+o(1)\right) =$$

$$\left(\frac{\ln(2) + \overbrace{3\ln(n)} + \ln(1+o(1))}{\underbrace{\ln(n)}}\right)\left(1+o(1)\right) =$$

$$\left(3 + o(1)\right)\left(1+o(1)\right) \to 3$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\cos\left(\frac{3}{n}\right) - \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}\right)$$

USIAMO LE INFORMAZIONI:

$$\cos(a_n) = 1 - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$$

$$\sqrt{1+a_n} = 1 + \frac{a_n}{2} + o(a_n)$$

(se $a_n \to 0$)

ALLORA:

$$n^2\left(-\cos\left(\frac{3}{n}\right)-\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}\right)=$$

$$\left(\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$n^2\left[\underbrace{\left(\cancel{1}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}\right)^2+o\left(\left(\frac{3}{n}\right)^2\right)\right)}_{\text{coseno}}-\underbrace{\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}_{\text{radice}}\right]=$$

$$n^2\left[-\frac{9}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=$$

$$n^2\left[-5\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=$$

$$\left(o\left(\frac{9}{n^2}\right)=o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$+o(\cdot)=-o(\cdot)$$

(potrei scrivere $n^2\left[-\frac{19}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(-\frac{19}{2}\frac{1}{n^2}\right)\right]$)

$$-5+o(1)\longrightarrow-5$$

$$o(O_n)-o(O_n)$$

NON FA ZERO

FA $o(O_n)$