Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 12, 10 novembre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

ABBIAMO VISTO VARI ESEMPI IN CUI, NEL FARE UN LIMITE, SI "INDIVIDUA UN TERMINE PRINCIPALE"

PER ES.
$$\lim_{n\to\infty} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{VINCE!}}}{n^4} - n^3 = \lim_{n\to\infty} \underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{n^4} \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

OPPURE
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n^2+n+1}{2n^3+n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2n^3} \frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{2n}+\frac{7}{2n^3}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\text{infinitesimi}}{1+\text{infinitesimi}} = \frac{1}{2}$$

QUI $\dfrac{n^3-n^2+n+1}{2n^3+n^2+7}$ "SI COMPORTA COME $\dfrac{n^3}{2n^3}$"

VOGLIAMO "CODIFICARE" QUESTO TIPO DI PROCEDIMENTI

DEFINIZIONE Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ DICO che sono **ASINTOTICHE** se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad : \quad \text{scrivo} \quad a_n \simeq b_n$$

<u>NOTA:</u> Per fare questa def. devo supporre $b_n \neq 0$, Potrei in realtà dire che $a_n \simeq b_n$ SE esiste una c_n tale che

$$c_n \to 1 \quad e \quad a_n = b_n \cdot c_n$$

QUESTA 2^a DEF. SI RICONDUCE ALLA 1^a se $b_n \neq 0$

DI SOLITO PERÒ LA 1^a BASTA.

<u>FATTO</u> Se $a_n \simeq b_n$, se $c_n \simeq d_n$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{d_n}$$

ANZI $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \ell \iff \exists \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{d_n} = \ell \quad (\ell \in \overline{\mathbb{R}})$

(per es. se $\frac{a_n}{c_n}$ NON HA LIM., NEANCHE $\frac{b_n}{d_n}$ HA LIM.)

<u>DIM.</u> Dire che $a_n \simeq b_n$ significa che

$b_n = a_n \cdot \alpha_n$ dove $\alpha_n \to 1$

analogamente $c_n \simeq d_n$ significa $d_n = \gamma_n c_n$ con $\gamma_n \to 1$

Ne segue

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{b_n}{d_n} \underbrace{\frac{\gamma_n}{\alpha_n}}_{\to 1}$$

NE SEGUE LA TESI!

ESEMPI

$P(x)$ è un polinomio $P(x) = a_N x^N +$ grado $< N$

ALLORA $P(n) \simeq a_N n^N$

DIM. $P(n) = a_N n^N + a_{N-1} n^{N-1} + \dots + a_0 =$

$$a_N n^N \underbrace{\left(1 + \frac{a_{N-1}}{a_N} \frac{1}{n} + \dots + \frac{a_0}{a_N} \frac{1}{n^N}\right)}_{\text{successione che tende a } 1}$$

HO VERIFICATO CHE $P(n) \simeq a_N n^N$

DEF. Date $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ dico che

$\{a_n\}$ è infinitesimo di ordine maggiore rispetto a $\{b_n\}$

SE $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

OSS. (a) Non si chiede che $a_n \to 0$ / $b_n \to 0$ (anche se di solito questa è la situazione che si trova)

Per esempio se $b_n = 1$ $\forall n$, dire che $\{a_n\}$ è infinitesimo di ordine maggiore rispetto a $\{b_n\}$ VUOL DIRE SOLTANTO CHE $a_n \to 0$

(b) Anche qui serve chiedere $b_n \neq 0$, perché la def. abbia senso. PERÒ POTREI DIRE $\{a_n\}$ è .. di ord. sup a $\{b_n\}$ SE esiste $\{c_n\}$ t.c. che

$c_n \to 0$ e $a_n = b_n \cdot c_n$

NELLA PRATICA $b_n \neq 0$ e quindi la def. originale VA BENE

NOTAZIONE Per indicare che $\{a_n\}$ è (infinitesimo) di ordine superiore a $\{b_n\}$ SCRIVO

$$a_n = o(b_n) \qquad (a_n \text{ è O-PICCOLO di } b_n)$$

<u>ATTENZIONE</u>: Nella notazione il simbolo di "=" è usato in modo improprio (NON È SIMMETRICO)

A RIGORE DOVREI DIRE

$$o(b_n) = \left\{ \text{tutte le successioni } a_n \text{ tali che } \frac{a_n}{b_n} \to 0 \right\}$$

e SCRIVERE $a_n \in o(b_n)$

PERÒ L'EGUALE È COMODO DA USARE – PURCHÉ SI CAPISCA BENE COME VIENE USATO

<u>ESEMPI</u>

$$\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \left(\text{PERCHÉ } \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \to 0\right)$$

$$\frac{1}{2n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \left(\text{perché } \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2} \to 0\right)$$

MA NON NE SEGUE $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n^2}$!!!

ANCHE $a_n = n$ è infinitesimo di ordine sup a $b_n = n^2$

$n = o(n^2)$ (ANCHE SE NON SONO INFINITESIMI)

RICORDARSI che $o(\cdot)$ è un "ordine di infinitesimo

SI PUÒ ANCHE DEFINIRE GLI ORDINI DI INFINITO:

$\{a_n\}$ È UN INFINITO DI ORDINE MAGGIORE A $\{b_n\}$

se $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty$

PER ESEMPIO: n^2 È INFINITO DI ORD SUP. A n

$\frac{1}{n}$ È INFINITO DI ORD. SUP. A $\frac{1}{n^2}$

NOTA $\{a_n\}$ è INFINITO DI ORD. SUP. A $\{b_n\}$

$\Updownarrow$

$\{b_n\}$ è INFINITESIMO DI ORD. SUP. AD $\{a_n\}$

TEOREMA $a_n \simeq b_n$ SE E SOLO SE

$a_n = b_n + o(b_n)$ SE E SOLO SE

$(a_n - b_n = o(b_n))$

$b_n = a_n + o(a_n)$

$(b_n - a_n = o(a_n))$

DIM. Se $\frac{a_n}{b_n} \to 1 \iff \frac{a_n - b_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} - 1 \to 0$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE

Siano $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $\{c_n\}$ $\{d_n\}$ successioni.

Se $b_n = o(a_n)$ $d_n = o(c_n)$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{c_n + d_n} = \lim_{n\to} \frac{a_n}{c_n}$$

BASTA OSSERVARE CHE $a_n + b_n \simeq a_n$ / $c_n + d_n \simeq c_n$

SI PUÒ ANCHE FARE IN TERMINI DI INFINITI!

Se a_n è infinito di ordine maggiore a b_n
c_n " " " " " " " d_n

STESSO RISULTATO

(si buttano via gli infinitesimi di ordine superiore o
gli infiniti di ordine inferiore)

ATTENZIONE IL TEOREMA NON DICE CHE SI POSSO SEMPRE trascurare gli $o(\cdot)$, LO SI PUÒ FARE QUANDO COMPAIONO IN UN RAPPORTO CON LA "PARTE PRINCIPALE" DAVANTI

ESEMPIO DI USO SCORRETTO

$$\frac{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \simeq \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 0$$

SBAGLIATO

SE SVOLGO TROVO $\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1 \to 1$

IN EFFETTI IL PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE NON SI APPLICA IN QUESTO CASO.

POSSIAMO "RILEGGERE" I LIMITI NOTEVOLI:

se $a_n \to 0$ $\quad (a_n \neq 0 \ \forall n)$

(a) $$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$

(b) $$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$$

(c) $$\lim_{n \to \infty} \frac{(1+a_n)^{\alpha} - 1}{a_n} = \alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

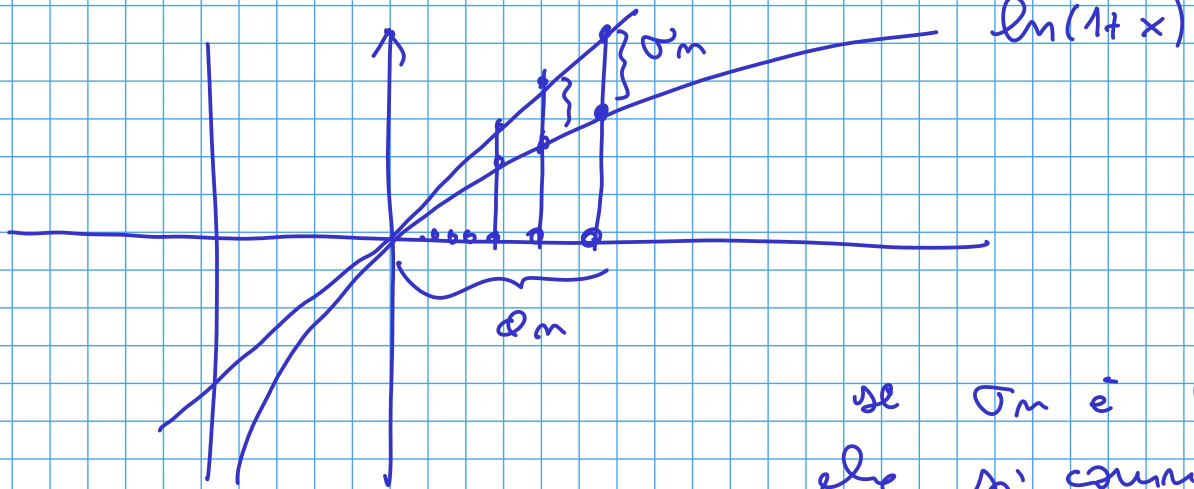
COME SEGUE:

(a) $\ln(1+a_n) \simeq a_n$ oppure $\ln(1+a_n) = a_n + o(a_n)$

(b) $e^{a_n} - 1 \simeq a_n$ oppure $e^{a_n} = 1 + a_n + o(a_n)$

(c) $(1+a_n)^2 - 1 \simeq 2a_n$ OPPURE $(1+a_n)^2 = 1 + 2a_n + o(a_n)$

INTUITIVAMENTE LA (a) DICE



se σ_n è la differenza, quindi "l'errore" che si commette approssimando $\ln(1+x)$ con x, si ha:

$$\frac{\sigma_n}{a_n} \to 0$$

DAL PUNTO DI VISTA FORMALE TUTTO È CONTENUTO NEL $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$

RIFACCIAMO ALCUNI LIMITI UTILIZZANDO "GLI o-PICCOLI"

Useremo la formula

$$\boxed{(1+a_n)^{\alpha} = 1+\alpha a_n + o(a_n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - n$$

FACCIAMOLO IN VARI MODI...

(a) Razionalizzando:

$$\sqrt{n^2+1} - n = \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \to 0$$

$\boxed{\text{LIMITE} = 0}$

(b) Usiamo $\lim_{n\to\infty} \frac{(1+a_n)^{1/2}-1}{a_n} = \frac{1}{2}$ (cioè $(1+a_n)^{1/2}-1 \simeq \frac{1}{2}a_n$)

(se $a_n \to 0$)

$$\sqrt{n^2+1} - n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right) = n\left((1+a_n)^{1/2} - 1\right)$$

$$\left(\text{DOVE } a_n = \frac{1}{n^2}\right) = n\,\frac{(1+a_n)^{1/2}-1}{a_n}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\,\frac{(1+a_n)^{1/2}-1}{a_n}$$

DUNQUE IL LIMITE È ZERO, DATO CHE VIENE IL PRODOTTO

DI $\frac{1}{n}$ (che tende a zero) e $\frac{(1+a_n)^{1/2}-1}{a_n}$ che tende a $\frac{1}{2}$

NOTA CON QUESTI PASSAGGI SI VEDE CHE

$$a_n = \sqrt{n^2+1} - n \simeq \frac{1}{2n}$$

IN PARTICOLARE $a_n \to 0$, MA SO ANCHE CHE

$$n \cdot a_n \to \frac{1}{2}, \qquad n^2 a_n \to +\infty.$$

(c) (variante di b) - USO GLI o - PICCOLI

$$\sqrt{n^2+1} - n = n\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} - 1\right) =$$

(USO IL FATTO CHE $(1+a_n)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}a_n + o(a_n)$ (se $a_n \to 0$)

con $a_n = 1/n^2$

$$= n\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) = n\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n} + n\,o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \left(n\,o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(n\cdot\frac{1}{n^2}\right) = o\,\frac{1}{n} \right)$$

FATTO GENERALE: Se $a_n = o(b_n)$ allora

$$c_n \cdot a_n = o(c_n \cdot b_n)$$

INFATTI $a_n = o(b_n)$ SIGNIFICA $\frac{a_n}{b_n} \to 0$

$c_n a_n = o(c_n b_n)$ SIGNIFICA $\frac{c_n a_n}{c_n b_n} \to 0$ SEGUE DA

QUINDI $a_n = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

(è la stessa informazione trovata in (b) - PERò è DETTA IN TERMINI DI o-PICCOLI)

DUNQUE $a_n \to 0$ (posso buttare via $o\left(\frac{1}{n}\right)$)

DUNQUE

$n a_n \to \frac{1}{2}$ in fatti

$$n a_n = n\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} + o\left(n \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} + o(1) \to \frac{1}{2}$$

<u>NOTA</u> $o(1)$ VUOL DIRE "UN INFINITESIMO"

<u>COMMENTO</u>

IL MODO (c) ci permette di scrivere

$$\boxed{\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \quad \star$$

DUNQUE, se $n \to \infty$, $\sqrt{n^2+1} \simeq n$

- Se trovo $\frac{\sqrt{n^2+1}}{3n+7} \simeq \frac{n}{3n+7} \to \frac{1}{3}$

- SE PERÒ "TOLGO LA PARTE PRINCIPALE"

$$n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$$

NON POSSO METTERE n al posto di $\sqrt{n^2+1}$, DEVO USARE GLI ALTRI TERMINI

$$= n\left(n+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{2n}\right)-n\right) = n\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}+o(1) \to \frac{1}{2}$$

• ANCHE IL TERMINE $\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ PUÒ NON BASTARE

Supponiamo di avere:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n^2+1}-n-\frac{1}{2n}\right)$$

LE INFORMAZIONE RACCHIUSE IN ($\star$) NON BASTANO:
VEDIAMO COSA VA MALE

So che $\sqrt{n^2+1} = n+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$. ($\star$).

Mettiamolo in

$$n^2\left(\sqrt{n^2+1}-n-\frac{1}{2n}\right) = n^2\left(n+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-n-\frac{1}{2n}\right) =$$

$$n^2\, o\left(\frac{1}{n}\right)$$ ← NON POSSO DIRE A QUANTO TENDE

(se avessi $n\, o\left(\frac{1}{n}\right)$ saprei che tende a zero)

IL LIMITE SOPRA VA FATTO "A MANO" – RAZIONALIZZIAMO

$$n^2\left(\sqrt{n^2+1}-n-\frac{1}{2n}\right) =$$

$$\frac{n^2\left(\sqrt{n^2+1}-n-\frac{1}{2n}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n+\frac{1}{2n}\right)}{\sqrt{n^2+1}+n+\frac{1}{2n}} =$$

$$\frac{n^2\left[n^2+1-\left(n+\frac{1}{2n}\right)^2\right]}{n+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+n+\frac{1}{2n}} = \frac{n^2\left[\cancel{n^2}+\cancel{1}-\cancel{n^2}-\cancel{1}-\frac{1}{4n^2}\right]}{2n+o(2n)} =$$

di ordine inferiore a n

$$\frac{-1/4}{2n+o(n)} = \frac{-1/4}{2n\left(1+\frac{o(n)}{n}\right)} =$$

NOTA $o(n) = o(2n)$

$\left(\frac{o_n}{n}\to 0 \iff \frac{o_n}{2n}\to 0\right)$

$$\frac{-\frac{1}{4}}{2n(1+o(1))} = -\frac{1}{8n}\,\frac{1}{1+o(1)} = -\frac{1}{8n}\left(1+o(1)\right) = -\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\frac{1}{1+o(1)} = (1+o(1))$

HO TROVATO CHE $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n^2+1}-n-1/2n\right)=0$, MA ANCHE

$$n^2\left(\sqrt{n^2+1}-n-\frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \iff$$

$$\sqrt{n^2+1} - n - \frac{1}{2n} = -\frac{1}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \iff$$

$$\boxed{\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)} \quad (\star\star)$$

HO TROVATO UN ALTRO TERMINE CHE PRIMA ERA NASCOSTO IN $o\left(\frac{1}{n}\right)$

Questa ultima formula ci dice per esempio che

$$\lim_{n\to+\infty} n^3\left(\sqrt{n^2+1} - n - \frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{8}$$

(ANZI QUESTO LIMITE È EQUIVALENTE A $(\star)$, $(\star\star)$)

VEDIAMO UNO DEI LIMITI DI IERI

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[20]{n^{40}+5n^{38}+1} - n^2$$

$$\boxed{(1+a_n)^\alpha = 1 + \alpha a_n + o(a_n)}$$

$$\sqrt[20]{n^{40}+5n^{38}+1}-n^2 = n^2\left[\Big(\underbrace{1+\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^{40}}}_{a_n}\Big)^{\frac{1}{20}}-1\right] =$$

$$\left(\alpha=\frac{1}{20}\right) \qquad n^2\left[1+\frac{1}{20}\left(\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^{40}}\right)+o\left(\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^{40}}\right)-1\right] =$$

$$\frac{1}{20}\left(5+\frac{1}{n^{38}}\right)+o\left(5+\frac{1}{n^{38}}\right) \overset{\text{(per la (2) sotto)}}{=} \frac{5}{20}+\underbrace{\frac{1}{20}\frac{1}{n^{38}}+o(5)}_{o(1)} \overset{\text{(per la (1))}}{=} \frac{5}{20}+o(1)$$

$$\longrightarrow \frac{5}{20}$$

FATTO (1) $o(b_n)+o(b_n)=o(b_n)$ cioè

se $a_n=o(b_n)$, $a'_n=o(b_n) \Rightarrow a_n+a'_n=o(b_n)$

(dimostrazione evidente)

(2) $o(b_n+o(b_n))=o(b_n)$ cioè

$$\left.\begin{array}{l}\text{se } a_n=o(b_n)\\ \text{se } c_n=o(a_n+b_n)\end{array}\right\} \Rightarrow c_n=o(b_n)$$

(verifica è immediata – PROVARE)

SE VOLESSI CALCOLARE L'ULTIMO LIMITE "RAZIONALIZZANDO"

DOVREI USARE LA FORMULA

$$A^{20} - B^{20} = (A-B)\left(A^{19} + A^{18}B + A^{17}B^{2} + \dots + AB^{18} + B^{19}\right)$$

DOVE $A = \sqrt[20]{n^{40} + 5n^{38} + 1}$ $B = 1$ ...