Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 11, 9 novembre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

Sottosuccessioni $\{a_n\}$ successione. Chiamo

sottosuccessione (o successione estratta) di $\{a_n\}$ una

succ. $\{b_n\}$ ottenuta da $\{a_n\}$:

$$b_n = a_{\sigma_n}$$

dove $\{\sigma_n\}$ è una succ. di interi strettamente

crescente $\sigma_{n+1} > \sigma_n$.

NOTARE che in questo caso $\sigma_n \to \infty$ se $n \to \infty$

infatti se $\sigma_n > \sigma_{n+1} \Rightarrow \sigma_n \geq n$

ESEMPI $\{a_n\}$ $\{a_{2n}\}$ è una sott. succ. di $\{a_n\}$

$\sigma_n = 2n$

DUNQUE $\{4n^2\}$ è estratta da $\{n^2\}$

$\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ è estratta da $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

TEOREMA Se $\{a_n\}$ ha limite ℓ $(\in \overline{\mathbb{R}})$

allora ogni sottosuccessione di $\{a_n\}$ ha ℓ stesso limite

DIM. Visto la volta passata, dato che $\sigma_n \to +\infty$

IL VICEVERSA NON È VERO. $\{(-1)^n\}$ non ha limite, ma la sua estratta $\{(-1)^{2n}\} = \{1\}$ tende a 1

Il teorema appena scritto mostra che una $\{a_n\}$ NON HA LIMITE: basta trovare due estratte che tendono a limiti diversi:

ESEMPIO $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$

Posso considerare $\sigma_n = 2n \Rightarrow$ trovo $a_{2n} = 1 \to 1$

$\sigma_n = 2n+1 \Rightarrow$ $a_{2n+1} = -1 \to -1$

DUNQUE ho dimostrato che $\{(-1)^n\}$ NON HA LIMITE

TEOREMA Supponiamo di avere due succ. di interi, strett. crescenti, $\{\sigma_n^1\}$ $\{\sigma_n^2\}$

Tali che ogni intero n è σ_k^1 o σ_k^2

per qualche k ($\{\sigma^1_n\}$ e $\{\sigma^2_n\}$ "esauriscono $\mathbb{N}$")

(ESEMPIO: $\sigma^1_n = 2n$ $\sigma^2_n = 2n+1$)

SIA $\{a_n\}$ tale che

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_{\sigma^1_n} = \ell$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_{\sigma^2_n} = \ell$$

LO STESSO ℓ !!

ALLORA $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \ell$

(NO DIM.)

Torniamo alle successioni che tendono a e.

- VISTO $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

È LA DEFINIZIONE DI e, la posso fare dopo aver dim. che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente al crescere di n

- VISTO Se $\{\sigma_n\}$ è una succ. in $\mathbb{N}$ con $\sigma_n \to \infty$ interi $\left(1+\frac{1}{\sigma_n}\right)^{\sigma_n} \to e$

• **VISTO** Se $\{a_n\}$ è una succ. in $\mathbb{R}$ con

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

VEDIAMO:

• Se $a_n \to -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

per es. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \to e$

Dim Se $a_n \to +\infty \Rightarrow -a_n \to -\infty$

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{-a_n}} = \left[\frac{1}{\left(\frac{a_n+1}{a_n}\right)}\right]^{-a_n} =$$

$$\left[\frac{a_n \overset{+1-1}{\vee}}{a_n+1}\right]^{-a_n} = \left[\frac{a_n+1}{a_n+1} - \frac{1}{a_n+1}\right]^{-a_n} =$$

$$\left(1-\frac{1}{a_n+1}\right)^{-a_n} = \left(1+\frac{1}{\underbrace{-a_n-1}_{b_n}}\right)^{\overset{b_n}{-a_n-1}}\left(1+\frac{1}{-a_n-1}\right)$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}}_{\to e}\underbrace{\left(1-\frac{1}{a_n+1}\right)}_{\to 1}$$

dove $b_n = -a_n - 1$

e quindi $b_n \to +\infty$

Per quanto visto prima $\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \to e$

Inoltre $\frac{1}{a_n+1} \to 0 \Rightarrow \left(1-\frac{1}{a_n+1}\right) \to 1$

DUNQUE $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$

CONSEGUENZA $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

perché $\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n} \to e$

- Se $\{a_n\}$ è una succ. tale che $a_n > 0 \ \forall n$

$a_n \to 0$ (cioè $a_n \to 0^+$)

ALLORA $\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$

DIM. $(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = \left(1+\frac{1}{1/a_n}\right)^{1/a_n} = \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \to e$

dove $b_n = \frac{1}{a_n} \to +\infty$

- se $\{a_n\}$ tende a 0^- (cioè $a_n < 0$, $a_n \to 0$)
  Allora $(1 + a_n)^{1/a_n} \to e$

DIM - Come la precedente, solo che $\frac{1}{a_n} \to -\infty$

- METTENDO INSIEME LE DUE PRECEDENTI:

  se $\{a_n\}$ è una succ. con $a_n \neq 0$ $\forall n$
  e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ALLORA

$$\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$$

DIM. (idea) posso dividere IN in due succ. di indici σ_n^+ e σ_n^- tali che:

$$a_{\sigma_n^+} > 0 \quad \text{e} \quad a_{\sigma_n^-} < 0$$

Si vede allora che $a_{\sigma_n^+} \to 0^+$

(se ci sono infiniti σ_n^+ - se no non importa)

e $a_{\sigma_n^-} \to 0^-$ (se ci sono ∞ σ_n^-)

DUNQUE $$\left(1+a_{\sigma_n^+}\right)^{1/a_{\sigma_n^+}} \to e$$

$$\left(1+a_{\sigma_n^-}\right)^{1/a_{\sigma_n^-}} \to e$$

Dato che viene lo stesso limite, deduco che

$$(1+a_n)^{a_n} \to e$$

L'ULTIMO PASSAGGIO DUNQUE DICE

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{SE } a_n \to 0 & (a_n \neq 0 \ \forall n) \\ \text{ALLORA} & (1+a_n)^{1/a_n} \to e \end{array}}$$

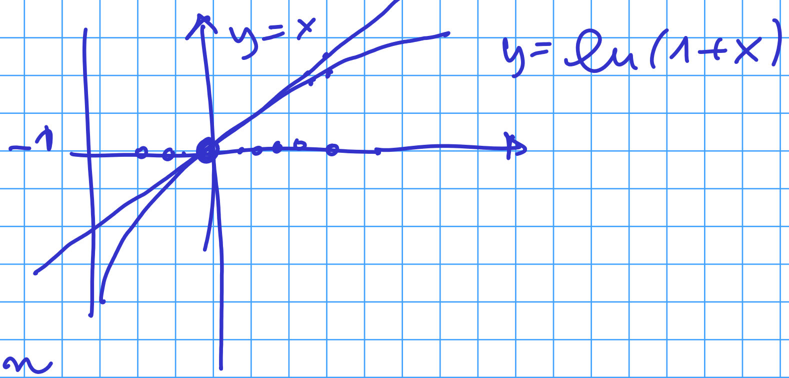
- APPLICHIAMO IL LOGARITMO IN BASE e ALLA FORMULA SOPRA.

[DIAMO PER BUONO CHE se $a_n \to l > 0 \Rightarrow$ $\ln(a_n) \to \ln(l)$ (continuità del logaritmo]

Troviamo che: se $a_n \to 0$, $(a_n \neq 0 \ \forall n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$ LIMITE NOTEVOLE

INTERPRETAZIONE



se $a_n \to 0$

$\Rightarrow \quad \ln(1+a_n) \approx a_n$

- Prendiamo di nuovo una $\{a_n\}$ con $a_n \to 0$

Poniamo $b_n = \ln(1+a_n) \leftrightarrow a_n = e^{b_n} - 1$

Notiamo che $b_n \to 0$

Per il limite di prima so che

$$\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1$$

e cioè, in termini di b_n

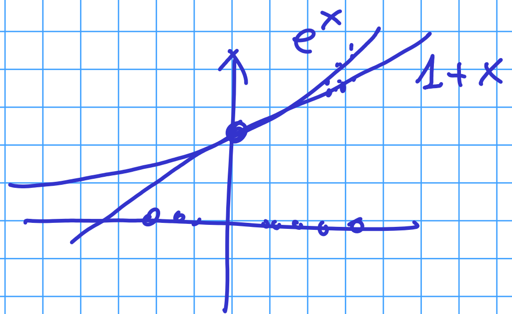
$$\frac{b_n}{e^{b_n}-1} \to 1$$

DUNQUE se $b_n \to 0$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{e^{b_n}-1}{b_n} = 1}$$

LIMITE NOTEVOLE

INTERPRETAZIONE se $b_n \to 0$ $e^{b_n} \simeq 1 + b_n$



- ULTIMO LIMITE NOTEVOLE.

Prendiamo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia $\{a_n\}$ tale che $a_n \to 0$.

ALLORA

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \alpha$$ LIMITE NOTEVOLE

per es. se $\alpha = 2$ $\frac{(1+a_n)^2 - 1}{a_n} = \frac{1 + 2a_n + a_n^2 - 1}{a_n}$

$= \frac{2a_n + a_n^2}{a_n} = 2 + a_n \to 2$

altro esempio: $\alpha = 1/2$ (RAZIONALIZZO)

$$\frac{(1+a_n)^{1/2}-1}{a_n} = \frac{\left((1+a_n)^{1/2}-1\right)\left((1+a_n)^{1/2}+1\right)}{a_n\left((1+a_n)^{1/2}+1\right)}$$

$$= \frac{1+a_n-1}{a_n\left((1+a_n)^{1/2}+1\right)} = \frac{1}{(1+a_n)^{1/2}+1} \to \frac{1}{2}$$

CASO GENERALE

$$\frac{(1+a_n)^{\alpha}-1}{a_n} = \frac{e^{\alpha \ln(1+a_n)}-1}{a_n} =$$

$$\frac{e^{\alpha \ln(1+a_n)}-1}{\alpha \ln(1+a_n)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+a_n)}{a_n} =$$

$$\frac{e^{b_n}-1}{b_n} \cdot \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \cdot \alpha \qquad \text{se } b_n = \alpha \ln(1+a_n)$$

$(e \; b_n \to 0)$

$\downarrow$ limiti di primo $\downarrow$

$1 \qquad 1$

$\to \alpha$

ESERCIZI Calcolare i limiti delle seguenti successioni

$$a_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2-1} - n$$

$$a_n = \sqrt[3]{n^3+2n-1} - n$$

$$a_n = \sqrt{n^4+n^2+1} - n^2$$

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt{n^4+n^3+1} - n$$

$$a_n = \sqrt[20]{n^{40}+5n^{38}+n^5+2} - n^2$$

Facciamo il terzo usando i limiti notevoli visti sopra

$$a_n = \sqrt{n^4+n^2+1} - n^2 = n^2\left[\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right] = n^2\left[(1+b_n)^{\frac{1}{2}}-1\right]$$

$$\left(\text{dove } b_n = \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right) = n^2\,\frac{\left[(1+b_n)^{1/2}-1\right]}{b_n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right) = \frac{(1+b_n)^{1/2}-1}{b_n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

PER QUANTO VISTO il limite fa $\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$