Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 10, 27 ottobre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

TEOREMA (CESÀRO) Se $\{a_n\}$ successione con $a_n > 0$,

se esiste $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, ALLORA

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

(ESEMPIO $a_n = 2^n$ $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2^n} = 2$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$)

DIM. Uso la def. di limite. (caso $\ell \in \mathbb{R}$) Sia $\varepsilon > 0$,

dato che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$

$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}$$

Questa dis. si può riscrivere:

$$\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) a_n < a_{n+1} < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) a_n \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

$$\Rightarrow \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 a_n < \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) a_{n+1} < a_{n+2} < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) a_{n+1} < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 a_n \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

Analogamente

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{3}\right)^3 a_n < \left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right) a_{n+2} < a_{n+3} < \left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right) a_{n+2} < \left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)^3 a_n \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

⋮ ITERANDO TROVO CHE, $\forall k$ intero, vale

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)^k a_n < a_{n+k} < \left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)^k a_n \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

Posso prendere $n = \bar{n}$ e scrivere

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)^k a_{\bar{n}} < a_{\bar{n}+k} < \left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)^k a_{\bar{n}} \qquad \forall k \geq 0$$

oppure, se $\bar{n}+k$ lo chiamo di nuovo n, trovo $(k = n - \bar{n})$

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}} < a_n < \left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}} \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

$$\frac{(l+\varepsilon/2)^n}{(l+\varepsilon/2)^{\bar{n}}}$$

FACCIAMO LA RADICE n-ESIMA:

$$\sqrt[n]{\frac{a_{\bar{n}}}{(l-\varepsilon/2)^{\bar{n}}}}\,\left(l-\varepsilon/2\right) < \sqrt[n]{a_n} < \left(l+\varepsilon/2\right)\sqrt[n]{\frac{a_{\bar{n}}}{(l+\varepsilon/2)^{\bar{n}}}} \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

Ricordiamo che $\sqrt[n]{A} \to 1$ se $A \in]0,+\infty[$ $\Longrightarrow$

$$\sqrt[n]{\frac{a_{\bar n}}{(\ell-\varepsilon/2)^{\bar n}}}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right) \to \ell-\frac{\varepsilon}{2} \; (< \ell-\varepsilon), \quad \sqrt[n]{\frac{a_{\bar n}}{(\ell+\varepsilon/2)^{\bar n}}}\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right) \to \ell+\frac{\varepsilon}{2} < \ell+\varepsilon$$

Ne segue che per $n \geq \bar n_1$ (eventualmente più grande di $\bar n$)

$$\sqrt[n]{\frac{a_{\bar n}}{(\ell-\varepsilon/2)^{\bar n}}}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right) > \ell-\varepsilon, \quad \sqrt[n]{\frac{a_{\bar n}}{(\ell+\varepsilon/2)^{\bar n}}}\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right) < \ell+\varepsilon$$

NE SEGUE CHE, per $n \geq \bar n_1$,

$$\ell-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell+\varepsilon$$

e quindi ho verificato che $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$

<u>NOTA</u> Se fosse vero $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ (non limite ma "=")

Allora $a_{n+1} = \ell \cdot a_n \Rightarrow a_n = a_0 \cdot \ell^n$

e allora $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_0} \cdot \ell \to \ell$

ESEMPI (conseguenze di Cesaro)

Già detto che $n! \to \infty$

$$\sqrt[n]{n!} \to ??$$

Usando Cesaro trovo ($a_n = n!$) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$

DUNQUE $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty$

Avevamo già visto ieri che $\frac{n!}{A^n} \to +\infty$. Se $A=1$ ritrovo quanto appena detto

Proviamo a calcolare $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

(cerco di confrontare i due "infiniti" $\sqrt[n]{n!}$ e n)

Uso Cesaro per la successione $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Devo calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} \quad \begin{matrix} = a_{n+1} \\ \\ = a_n \end{matrix} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)}!}{\cancel{n!}} \, \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

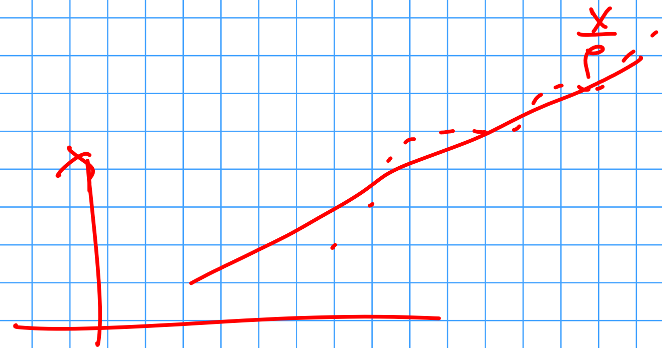
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n\cancel{+1})}{(n\cancel{+1})} \, \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \quad \text{(lo vediamo dopo)}$$

(si sa che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ e cioè $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$;

se passo al reciproco $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}$

Ho TROVATO CHE

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$$



MORALMENTE $\sqrt[n]{n!} \simeq \frac{n}{e}$

QUESTO SUGGERISCE CHE $n! \simeq \frac{n^n}{e^n}$ $\Big\}$ VA PRECISATO BENE

ESISTENZA DEL LIMITE PER SUCC. MONOTONE

Ricordiamo che, se $\{a_n\}$ è una successione, dico

$\{a_n\}$ CRESCENTE, se $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n$

$\{a_n\}$ DECRESCENTE, se $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n$

($\Rightarrow$ se $n \geq m$, allora $a_n \geq a_m$ / $a_n \leq a_m$)

DICO ANCHE CHE $\{a_n\}$ STRETTAMENTE CRESCENTE (DECR.) se $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} < a_n$)

Una succ. $\{a_n\}$ che verifica una di queste proprietà si dice MONOTÒNA

<u>TEOREMA</u> Se $\{a_n\}$ è monotona, allora esiste il limite di $\{a_n\}$. Anzi

- se $\{a_n\}$ è crescente $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n \quad (\in]-\infty, +\infty])$
- se $\{a_n\}$ è decrescente $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n \quad (\in [-\infty, +\infty[)$

Questo è l'unico teorema che vedremo che GARANTISCE l'esistenza del limite (SI BASA SULLA COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$)

<u>DIM.</u> Facciamo il caso di $\{a_n\}$ crescente. Devo allora dim. che

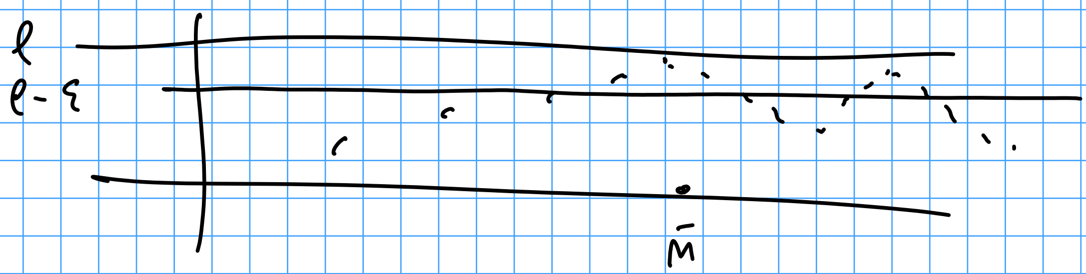
$\{a_n\}$ tende a $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ ← ESISTE PER LA COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$

Chiamo ℓ tale $\sup_n a_n$. Ci sono due casi: $\ell\in\mathbb{R}$ / $\ell=+\infty$

<u>1 caso: $\ell\in\mathbb{R}$</u> Per le proprietà dell'estremo superiore:

(a) $\ell \geq a_n \quad \forall n$

(b) $\forall \varepsilon>0 \quad \exists\, \bar{n} : \quad a_{\bar{n}} > \ell-\varepsilon$



Dato $\varepsilon>0$ sia $\bar{n}$ come in (b). Se prendo $n\geq\bar{n}$, si ha

$$\ell-\varepsilon \underset{(b)}{<} a_{\bar{n}} \underset{\{a_n\}\text{ crescente}}{\leq} a_n \underset{(a)}{\leq} \ell < \ell+\varepsilon$$

Ho VERIFICATO LA DEFINIZIONE DI $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \quad (\ell\in\mathbb{R})$

CASO 2, $\ell = +\infty$ Se $\sup_n a_n = +\infty$, sappiamo che

(b) $\forall c \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} > c$

Dato che $\{a_n\}$ cresce, si ha che

$$\forall n \geq \bar{n} \quad a_n \geq a_{\bar{n}} > c$$

HO VERIFICATO LA DEF. DI $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$

CONSEGUENZA Prendiamo una succ. $\{\alpha_n\}$ con

$$\alpha_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

HA SENSO prendere $X := 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$

$$:= \lim_{n \to \infty} \underbrace{0, \alpha_1 \dots \alpha_n}_{\frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n}}$$

INFATTI LA SUCC. $a_n = \frac{\alpha_1}{10} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n}$ è crescente rispetto a n

$$a_{n+1} = \frac{\alpha_1}{10^1} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \frac{\alpha_{n+1}}{10^{n+1}} = a_n + \frac{\alpha_{n+1}}{10^{n+1}} \geq a_n$$

APPLICAZIONE DEL TEOREMA PREC. $\Rightarrow$ IL NUMERO e

DEF: $$e := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Sono autorizzato a fare questa definizione SE DIMOSTRO CHE LA SUCC.

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \geq 1) \quad \text{è crescente ed è limitata}$$

Per dimostrarlo considero una seconda successione

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad n \geq 1$$

È OVVIO CHE $a_n \leq b_n$ $\quad \left(b_n = a_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$

VEDREMO CHE $\{b_n\}$ è decrescente

Ne seguirà che $a_n \leq e \leq b_n \quad \forall n$

$\{a_n\}$ è crescente

Vediamo che $a_n \geq a_{n-1}$ per $n \geq 2$

Scriviamo la dis. che vogliamo dimostrare: per $n \geq 2$ voglio

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \qquad \left(\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\frac{n}{n-1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n} \iff \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

SEGUE DA BERNOULLI:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{n}{n^2} = 1-\frac{1}{n}$$

DUNQUE $a_n \geq a_{n-1}$ cioè $\{a_n\}$ CRESCENTE

$\{b_n\}$ DECRESCENTE $\qquad b_n \leq b_{n-1}$ cioè $\qquad$ (se $n \geq 2$)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$1+\frac{1}{n} \leq \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n} \quad -1+1$$

$$\Updownarrow$$

$$1+\frac{1}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}$$

$$\Uparrow$$

VALE DATO CHE – USANDO BERNOULLI :

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n} \geq 1+\frac{n}{n^2-1} \geq 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n}$$

DUNQUE $\{b_n\}$ DECRESCE !

METTIAMO TUTTO INSIEME : $\left(b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) a_n \geq a_n \right.$

$$2 = a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1 = 4$$

Per il teorema sulle succ. monotone

$$a_n \to a \qquad\qquad b_n \to b \qquad\qquad (a \text{ e } b \text{ esistono!}$$

inoltre $\qquad 2 \leq a \leq b \leq 4 \qquad\qquad$ (a, b sono finiti)

Infine da $\quad \underset{\downarrow\atop b}{b_n} = \underset{\downarrow\atop a}{a_n} \underset{\downarrow\atop 1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \quad \Longrightarrow \quad \underline{a = b}$

SE CHIAMO e il valore comune dei due limiti HO FINITO

TEOREMA (~ CAMBIO DI INDICE NELLA SUCC.)

Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ $(\in \overline{\mathbb{R}})$

Supponiamo che $\{\sigma_n\}$ sia una successione di numeri interi tale che $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$

ALLORA $\lim_{n\to\infty} a_{\sigma_n} = \ell$

(ESEMPIO : Se $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ ANCHE $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e$)

DIM. Dalla def. so che (CASO $\ell \in \mathbb{R}$)

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad \forall n \geq \bar{n} \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ $(a_n \to \ell)$
- Preso $\bar{n}$ come sopra, dato che $\sigma_n \to +\infty$, $\exists \bar{n}_1$ tale che
  $\forall n \geq \bar{n}_1 \quad \sigma_n \geq \bar{n}$

ALLORA, quando $n \geq \bar{n}_1$ si ha $\ell - \varepsilon < a_{\sigma_n} < \ell + \varepsilon$

HO VERIFICATO LA DEF. DI $\lim_{n\to\infty} a_{\sigma_n} = e$

<u>QUINDI</u> se $\sigma_n \to +\infty$, $\sigma_n \in \mathbb{N}\ \forall n$ HO

$$\left(1+\frac{1}{\sigma_n}\right)^{\sigma_n} \to e$$

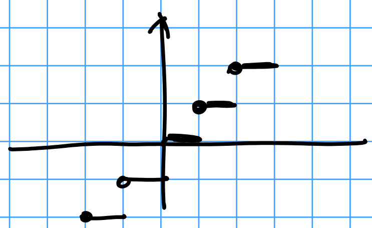
PRENDIAMO UNA σ_n che tende a $+\infty$, ma non necessariamente a valori interi. Voglio dim. che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sigma_n}\right)^{\sigma_n} = e$$

Ricordiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si può fare la "parte intera" di x

$[x] \in \mathbb{N}$ ed è l'unico intero n tale che $n \leq x < n+1$

$[1,5] = 1$ $\qquad$ $[-0,5] = -1$



Noto che, se $\sigma_n \to +\infty \Rightarrow [\sigma_n] \to +\infty$

(basta notare che $\underline{[\sigma_n] \leq \sigma_n < [\sigma_n]+1}$ $\Rightarrow$ $[\sigma_n] > \sigma_n - 1 \to +\infty$

$$\left(1+\frac{1}{[\sigma_n]+1}\right)^{[\sigma_n]} \leq \left(1+\frac{1}{\sigma_n}\right)^{\sigma_n} \leq \left(1+\frac{1}{[\sigma_n]}\right)^{[\sigma_n]+1} =$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{[\sigma_n]}\right)^{[\sigma_n]}}_{\downarrow \atop e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{[\sigma_n]}\right)}_{\downarrow \atop 1}$$

$$\| $$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{[\sigma_n]+1}\right)^{[\sigma_n]+1} \to e}{\left(1+\frac{1}{[\sigma_n]+1}\right) \to 1}$$

PER I CARABINIERI $\left(1+\frac{1}{\sigma_n}\right)^{\sigma_n} \to e$

<u>CONSEGUENZA</u> $x>0$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \Big[\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}}\Big]^x \to e^x$$

TENDE A e (prendo $\sigma_n = \frac{n}{x} \to +\infty$)

(sto dando per buono le proprietà delle potenze reali:

$$a_n \to e \Rightarrow a_n^x \to e^x \Big)$$

FATTO GENERALE Se $\{a_n\}$ è una succ, $a_n \to \ell$, $0<\ell<+\infty$.

ALLORA $\sqrt[n]{a_n} \to 1$

$\frac{\ell}{2} < \ell < 2\ell$

DIM. Se $a_n \to \ell > 0$ allora, per la perm. del segno ✓

$$0 < \frac{\ell}{2} \leq a_n \leq 2\ell < +\infty \quad \text{DEFINITIVAMENTE}$$

FACCIO LA RADICE n-ESIMA:

$$\underbrace{\sqrt[n]{\ell/2}}_{\downarrow\,1} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2\ell}}_{\downarrow\,1} \implies \sqrt[n]{a_n} \to 1$$

IN REALTÀ BASTA $0<a \leq a_n \leq b < +\infty$ (DEFINITIV.)

$$\implies \underbrace{\sqrt[n]{a}}_{\downarrow\,1} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{b}}_{\downarrow\,1} \implies \sqrt[n]{a_n} \to 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\sin(n)}{3+n+2n^2} = \frac{1}{2} \quad (\text{ok!})$$

$$\frac{n^2+\sin(n)}{3+n+2n^2} = \frac{1\cdot \cancel{n^2}}{2\cancel{n^2}} \, \frac{1+\frac{\sin(n)}{n^2}}{\frac{3}{2n^2}+\frac{1}{2n}+1} \to \frac{1}{2}\cdot\frac{1+0}{0+0+1} = \frac{1}{2}$$

Noto che $\sin(n)$ è compreso tra -1 e 1 $\Rightarrow$

$$\frac{\sin(n)}{n^2} = \underbrace{\sin(n)}_{\text{LIMITATA}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{TENDE A ZERO}} \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+\cos(n)}{n^2-n} = +\infty$$

Come prima

$$\frac{n^3+\cos(n)}{n^2-n} = \frac{n^3}{n^2}\,\frac{1+\frac{\cos(n)}{n^3}}{1-\frac{1}{n}} = n\,\frac{1+\frac{\cos(n)}{n^3}}{\underbrace{1-\frac{1}{n}}_{\text{TENDE A 1}}} \to +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n-n}{2^n+n^5} = +\infty \qquad \text{INFATTI}$$

$$\frac{3^n-n}{2^n+n^5} = \frac{3^n}{2^n}\,\frac{1-n/3^n}{1+n^5/2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1-n/3^n}{1+n^5/2^n} \to +\infty\cdot\frac{1-0}{1+0} = +\infty$$

INFATTI $A^n \to \infty$ se $A = \frac{3}{2} > 1$, $\frac{n}{3^n} \to 0$ $\frac{n^5}{2^n} \to 0$

dato che $\frac{A^n}{n^k} \to +\infty$ se $A > 1$ k qualunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 2^n + 1}{5^n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 2^n}{5^n} \cdot \underbrace{\frac{1+\frac{1}{n^2 2^n}}{1-3/5^n}}_{\text{TENDE A 1}} = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

PERCHÉ $\frac{2}{5} < 1$ (il termine n^2 perde)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n - 2^n}{1 - 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} \underbrace{\frac{1+\frac{n}{3^n}-\frac{2^n}{3^n}}{\frac{1}{2^n}-1}}_{\text{Tende a } -1} = -\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + n} = 2 .$$

$$\sqrt[n]{2^n+n} = \sqrt[n]{2^n(1+n/2^n)} = 2\sqrt[n]{1+\frac{n}{2^n}}$$

Dato che $1+\frac{n}{2^n} \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{1+\frac{n}{2^n}} \to 1$. DUNQUE $\sqrt[n]{2^n+n} \to 2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1+n^2}}{n+1} = \frac{1}{\infty} = 0 ,$$

perché

$$\sqrt[n]{1+n^2} = \underbrace{\sqrt[n]{n^2}}_{= (\sqrt[n]{n})^2 \to 1} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}+1}}_{\text{Tende a 1}} \to 1$$