Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 9, 26 ottobre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

RIASSUNTO PROPRIETÀ DEI SIMBOLI $+\infty$ / $-\infty$

ORDINE $\quad -\infty < x < +\infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

SOMME

$$x + (+\infty) = +\infty \quad \text{se} \quad x > -\infty$$

$$x + (-\infty) = -\infty \quad \text{se} \quad x < +\infty$$

PRODOTTI

$$x \cdot (+\infty) = +\infty \quad \text{se} \quad x > 0$$

$$x \cdot (-\infty) = -\infty \quad \text{se} \quad x > 0$$

$$x \cdot (+\infty) = -\infty \quad \text{se} \quad x < 0$$

$$x \cdot (-\infty) = +\infty \quad \text{se} \quad x < 0$$

RECIPROCI (qui bisogna distinguere 0^+ / 0^-)

$$\frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{1}{+\infty} = 0^+ \qquad \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

NEI CASI NON INDICATI SOPRA LE OPERAZIONI NON SONO DEFINITE

IN PARTICOLARE NON SI PUÒ ASSEGNARE UN VALORE ("a priori") A

$$+\infty - \infty \quad / \quad \frac{0}{0} \quad / \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \text{FORME INDETERMINATE}$$

Con queste convenzioni sono sempre veri i fatti seguenti:

DATE $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n \to \ell_1$, $b_n \to \ell_2$

(con $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$) si ha

$$a_n + b_n \to \ell_1 + \ell_2$$
$$a_n \cdot b_n \to \ell_1 \cdot \ell_2$$
$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{\ell_1}$$

PURCHE' nelle espressioni a destra NON SI RICADA NEI CASI INDICATI SOPRA

(NO DIM. – eccetto che per la somma)

Altre proprietà:

(DUE CARABINIERI) Se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ sono tre successioni tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ DEFINITIV.

STESSO LIMITE

Se $a_n \to \ell$ e $c_n \to \ell$, ALLORA anche $\{b_n\}$ tende a ℓ

- se $\ell = +\infty$ NON SERVE $\{c_n\}$: se $a_n \geq b_n$ e se $b_n \to +\infty$, ALLORA $a_n \to +\infty$
- Se $\ell = -\infty$ NON SERVE $\{a_n\}$: se $b_n \leq c_n$

e se $c_n \to -\infty$, ALLORA $b_n \to -\infty$

DIM. Scrivo le definizioni di $a_n \to \ell$, $c_n \to \ell$:
(caso $\ell \in \mathbb{R}$)

dato $\varepsilon > 0$

$\exists\ \bar{n}_1 : \forall n \geq \bar{n}_1 \qquad \ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$

$\exists\ \bar{n}_2 : \forall n \geq \bar{n}_2 \qquad \ell - \varepsilon \leq c_n \leq \ell + \varepsilon$

Allora se $n \geq \max(\bar{n}_1, \bar{n}_2) \implies$

$$\ell - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq \ell + \varepsilon$$

HO VERIFICATO LA DEF. DI $b_n \to \ell$ (!!)

CONSEGUENZE

- Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni

(I) Se $\{a_n\}$ è limitata e $b_n \to 0$, ALLORA

$$a_n \cdot b_n \to 0$$

(ANCHE SE $\{a_n\}$ PUÒ NON AVERE LIMITE)

(II) Se $\{a_n\}$ è limitata inferiormente e $b_n \to +\infty$

ALLORA $a_n + b_n \to +\infty$

(Se $\{a_n\}$ è lim. sup. e $b_n \to -\infty \Rightarrow a_n + b_n \to -\infty$)

<u>DIM.</u> (di (I)) Se $\{a_n\}$ è limitata $\Rightarrow$

esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$-M \leq a_n \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ne segue che

$$-M\, b_n \leq a_n \cdot b_n \leq M\, b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ma (per i teoremi di prodotto) $M \cdot b_n \to M \cdot 0 = 0$

Applicando i due carabinieri $\Rightarrow$ $a_n \cdot b_n \to 0$

(II) Se $\{a_n\}$ è limitata inferiormente $\Rightarrow$

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \text{ tale che } a_n \geq -M \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$a_n + b_n \geq -M + b_n$$

Per i teoremi sui limiti $-M + b_n \to +\infty$

Per i carabinieri $\Rightarrow$ $a_n + b_n \to +\infty$

ESEMPI

- $\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$
- $\lim_{n \to \infty} (-1)^n + n = +\infty$

LIMITE DI $\frac{P(n)}{Q(n)}$ P / Q polinomi

esempio $\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 7}{n^4 + 1}$

$$\frac{n^3 + 2n^2 + 7}{n^4 + 1} = \frac{n^3\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{7}{n^3}\right)}{n^4\left(1 + 1/n^4\right)} =$$

METTO IN EVIDENZA I TERMINI DI GRADO MASSIMO.

$$\frac{1}{n} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{7}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^4}} \longrightarrow 0 \cdot \frac{1+0+0}{1+0} = 0$$

IN GENERALE: $P(x) = a_N x^N +$ grado $< N$

$$Q(x) = b_M x^M + \text{grad} < M$$

$a_N \neq 0 \quad b_M \neq 0 \quad$ Allora

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \text{ se } N > M, \text{ a seconda che } \frac{a_N}{b_M} > 0 / \frac{a_N}{b_M} < 0$$

$$\phantom{\lim_{n \to +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} =} \begin{cases} \frac{a_N}{b_M} & \text{se } N = M \\ 0 & \text{se } M > N \end{cases}$$

DUNQUE $\quad \dfrac{n^4 - n^2 + 1}{2n^4 + n^3 - 7} \to \dfrac{1}{2}$

COME SE SI POTESSERO CANCELLARE I TERMINI DI GRADO MINORE DEL GRADO MASSIMO

QUESTO APPROCCIO FUNZIONA ANCHE SE CI SONO POTENZE NON INTERE PURCHÉ CI SIA CHIARAMENTE UN TERMINE DI GRADO MASSIMO (SIA A NUM. CHE A DEN.)

ES $\quad \displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 1} - n}{n^2 + 3} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4}} - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n^2}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}} - \frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n^2}} = \frac{\sqrt{1+0} - 0}{1+0} = 1$$

PER ESSERE PIGNOLI NOTIAMO CHE SI È USATO:

TEOREMA Se $a_n \geq 0$, $a_n \to \ell$ ALLORA

$$\sqrt{a_n} \to \sqrt{\ell}$$

NON È OVVIO!! Se sapessi che $\sqrt{a_n}$ HA LIMITE $m \geq 0 \Rightarrow m^2 = \ell$ (per il teorema sul prodotto) $\Rightarrow m = \sqrt{\ell}$

LO DIAMO PER BUONO (Lo dimostreremo più avanti in versione più generale! ANZI DIAMO PER BUONO CHE

$$\left[a_n \geq 0,\ a_n \to \ell \Rightarrow a_n^{\alpha} \to \ell^{\alpha} \right]$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ (e la potenza α-esima è definita.)

CI SONO CASI IN CUI NON C'È UN EVIDENTE "TERMINE DI GRADO MASSIMO"

ESEMPIO $a_n := \sqrt{n^2+1} - n \quad (+\infty + (-\infty))$

Se provo a fare come prima:

$$a_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right) \qquad (+\infty \cdot 0)$$

ENTRAMBI I TERMINI SONO "SIMILI A n" MA LA LORO DIFFERENZA NON È CHIARO COSA FACCIA.
IN QUESTO CASO SPECIALE POSSO CAVARMELA COSÌ:

$$\sqrt{n^2+1} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)}{\sqrt{n^2+1} + n} =$$

$$= \frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} \to 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1}+1}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0 = 0 \qquad \text{DUNQUE } \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - n = 0$$

ESEMPIO SIMILE $\qquad a_n = \sqrt{n^2+n} - n$

(per n grande si può pensare che $\sqrt{n^2+1}$ e $\sqrt{n^2+n}$ siano simili, entrambi simili a n. In effetti

$$\sqrt{n^2+1} = n\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}_{\downarrow \atop 1} \qquad \Big/ \quad \sqrt{n^2+n} = n\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\downarrow \atop 1} \Big)$$

PERÒ se faccio come prima:

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} =$$

$$\frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} \to \frac{1}{2} \neq 0$$

MORALE: $\sqrt{n^2+1}$ e $\sqrt{n^2+n}$ sono entrambe $\simeq n$

MA QUANDO FACCIO $\sqrt{n^2+1} - n$ e $\sqrt{n^2+n} - n$

QUESTE NON VANNO ALLO STESSO MODO: CONTANO DEI TERMINI (NASCOSTI) DI GRADO PIÙ BASSO

ESEMPIO

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - (-1)^n n + 1}{n+1}$$

NON È UN RAPPORTO TRA POLINOMI

PERÒ C'È UN "GRADO MASSIMO", CHE È 2! $\Rightarrow$

$$\frac{n^2-(-1)^n n+1}{n+1} = \underbrace{\frac{n^2}{n}}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}} \; \underbrace{\frac{1-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \to +\infty$$

SI È USATO IL FATTO CHE $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$ in quanto prodotto di INFINITESIMO × LIMITATO

(NOTA: $1 \le (-1)^n \le 1 \quad \forall n$)

$(-1)^n \to (-1)^\infty = \,??$ NON ESISTE (GIÀ VISTO!)

DOMANDA se $a_n \to \ell_1$, $b_n \to \ell_2$ COSA FA $a_n^{b_n}$

SICURAMENTE se $\ell_1 \in \,]0,+\infty[$, $\ell_2 \in \mathbb{R}$, allora $a_n^{b_n} \to \ell_1^{\ell_2}$ SE NO NON È CHIARO

IN REALTÀ CONVIENE PASSARE A

$$a_n^{b_n} = e^{\ln(a_n^{b_n})} = e^{\underbrace{b_n \ln(a_n)}_{\text{PRODOTTO}}}$$

I GIORNI 2 / 3 NOVEMBRE
C'È VACANZA

Qualche "criterio" un pò meno evidente.

TEOREMA Sia $\{a_n\}$ una successione con $a_n \geq 0$.

Supponiamo che esista $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ $\left(= \ell \in [0, +\infty]\right)$

ALLORA

se $0 \leq \ell < 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

se $\ell > 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Se $\ell = 1$ NON SI PUÒ DIRE NULLA.

NOTA Da questo criterio si ricava che

$\frac{A^n}{n^k} \to +\infty$ quando $A > 1$

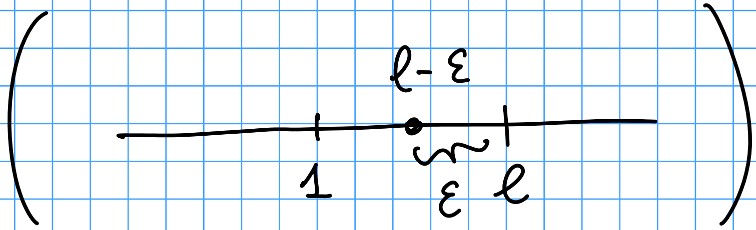
$n^k A^n \to 0$ quando $0 \leq A < 1$

dato che $\sqrt[n]{\frac{A^n}{n^k}} = \frac{A}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^k} \to A$

(ammettendo di sapere che $\sqrt[n]{n} \to 1$)

<u>DIM.</u> Supponiamo che $\sqrt[n]{A} \to \ell > 1$.

Dato che $\ell > 1$ posso prendere $\varepsilon = \frac{\ell - 1}{2} > 0$



Applico la def. di limite:

$$\exists\, \bar{n} : \quad \forall n \geq \bar{n} \qquad \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$$

posso elevare alla n; quindi:

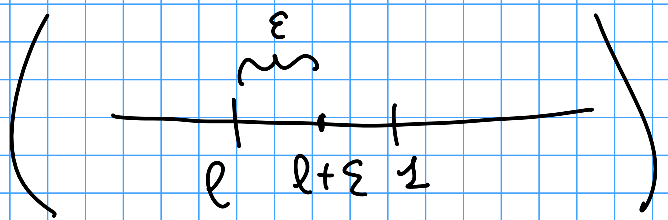
$$\exists\, \bar{n} : \quad \forall n \geq \bar{n} \qquad (\ell - \varepsilon)^n < a_n < (\ell + \varepsilon)^n$$

DATO CHE $\ell - \varepsilon > 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (\ell - \varepsilon)^n = +\infty$

(visto qualche lezione fa). Per i carabinieri

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = +\infty .$$

CASO $\ell < 1$. Prendo $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ (>0)



. Applico la def. di limite

$\exists\, \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$

elevo alla n:

$\exists\, \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad (\ell - \varepsilon)^n < a_n < (\ell + \varepsilon)^n$

(MA SO ANCHE CHE $a_n \geq 0$). Dato che $\ell + \varepsilon < 1$

$\lim_{n \to \infty} (\ell + \varepsilon)^n = 0 \Rightarrow$ USO I DUE CAR. $\Rightarrow a_n \to 0$

IDEA (CHE STA SOTTO AL CRITERIO)

SE $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, allora $a_n \simeq \ell^n$

QUESTO NON È STRETTAMENTE VERO - PERÒ SE $\ell \neq 1$

LE COSE "TORNANO"

<u>QUINDI</u> $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, $\ell \neq 1$, dico che $\{a_n\}$

ho un "andamento esponenziale".

TUTTE LE SUCCESSIONI "DI TIPO POLINOMIALE" HANNO $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. VEDI $\sqrt[n]{n^k} \to 1 \quad \forall k$

- SE SI TROVA $\sqrt[n]{a_n} \to 0$, SI HA (INTUITIV.) CHE $a_n \to 0$ PIÙ RAPIDAMENTE DI A^n PER $A<1$

TEOREMA (CESÀRO) Se $\{a_n\}$ successione di numeri positivi ($: a_n > 0$), se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$$

1 è "pedice"

ALLORA $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

NOTA Sapendo questo teorema, molti dei risultati visti sono semplici. Per esempio, per fare

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$, basta fare $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

(IN REALTÀ PER DIMOSTRARE IL TEOR. DI CESÀRO SERVONO

ALCUNI DI QUEI LIMITI ...)

DIAMO PER BUONO CESÀRO (PER OGGI) E VEDIAMO QUALCHE SUA CONSEGUENZA.

- $\lim_{n\to\infty} n! = +\infty$ (per esercizio)
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{A^n} = +\infty$ qualunque sia $A > 0$

$a_n := \frac{n!}{A^n}$ è una forma indeterminata (se $A > 1$) del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Posso provare a calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{A^{n+1}}}{\frac{n!}{A^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancelto{n+1}{(n+1)!}}{\cancelto{1}{n!}} \frac{\cancelto{1}{A^n}}{\cancelto{A}{A^{n+1}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{A} = +\infty$$

PER CESÀRO $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$$\frac{A^n}{A^{n+1}} = \frac{A \cdots A}{A \cdots A \, A} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} = n+1$$

MORALE $n!$ VA ALL'INFINITO PIÙ VELOCEMENTE DI A^n (qualunque sia $A > 0$)

- $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^n}{n!} = +\infty$. Per vederlo faccio così:

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{1} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{2} \cdots \frac{n}{n}\right)}_{\geq 1} \geq n \to +\infty$$

MORALE: n^n VA ALL'INFINITO PIÙ "VELOCEMENTE" DI $n!$

- $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^n}{A^n} = +\infty$ (Mettere insieme i due risultati precedenti

ESERCIZI

Calcolare i seguenti limiti di successione

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + \sin(n)}{3 + n + 2n^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + \cos(n)}{n^2 - n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^n - n}{2^n + n^5}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 2^n + 1}{5^n - 3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^n + n - 2^n}{1 - 2^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2^n + n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{1 + n^2}}{n + 1}$$