Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 8, 20 ottobre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = +\infty$$ VERIFICARE (usando la definizione)

Bisogna far vedere che $\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \ \bar{n}$ tale che

$$\forall n \geq \bar{n} \qquad \underbrace{\frac{n^2+1}{n+1} > K}_{} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gli interi n che verificano la disequazione contengono una "semiretta" $\{\bar{n}, \bar{n}+1, \dots\}$

RISOLVIAMO LA DISEQUAZIONE:

$(n \geq 0)$ $$n^2+1 > K(n+1) \iff n^2 - Kn + 1 - K \geq 0$$

SI SA CHE QUESTA DISEQ. È VERA PER n grande:

se $K^2 + 4(K-1) < 0$ è vero $\forall n$

$\Delta = K^2 + 4(K-1) \geq 0$ è vero per $n > \dfrac{K+\sqrt{\Delta}}{2}$

QUINDI, se $\bar{n} > \dfrac{K+\sqrt{\Delta}}{2}$ vale $\forall n \geq \bar{n}$ $\dfrac{n^2+1}{n+1} > K$

ALTRI ESEMPI (IMPORTANTI)

- $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ (già visti)
- $\lim_{n \to \infty} n = +\infty$ (" ")
- $\boxed{\lim_{n \to \infty} A^n = 0}$ se $0 < A < 1$

(per es. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$)

<u>DIM.</u> Devo verificare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$

$$\underbrace{-\varepsilon < A^n}_{\text{sempre vero}} \boxed{A^n < \varepsilon}$$

rimane questa dis.

Quanto sopra è equivalente a scrivere $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$

$$\left(\frac{1}{A}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}. \qquad \left(\text{ORA } \frac{1}{A} > 1\right)$$

Non posso passare al logaritmo perché la costruzione di $\ln(x)$ RICHIEDE la proprietà $0 < A < 1 \Rightarrow A^n \to 0$

Posso scrivere $\frac{1}{A} = 1 + \delta$ dove $\delta := \frac{1}{A} - 1 > 0$

Usando Bernoulli :

$$\left(\frac{1}{A}\right)^n = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta$$

Per avere $\left(\frac{1}{A}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$ basta avere $1+n\delta > \frac{1}{\varepsilon}$

e per quest'ultima dis. $n > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\frac{1}{\delta}$ $\leftarrow$ se prendo $\bar{n} > \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\frac{1}{\delta}$

Tutto torna ...

- $\boxed{\lim_{n\to\infty} A^n = +\infty}$ se $A > 1$ (BASTA GUARDARE LA DIM. PRECEDENTE USANDO A AL POSTO DI $\frac{1}{A}$)

(per es. $\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$)

- $\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{n} = +\infty$ se $A > 1$

INTERPRETAZIONE: A^n VA ALL'INFINITO PIÙ VELOCEMENTE DI n

- $\lim_{n\to\infty} (A^n - n) = +\infty$ $A>1$

ANCHE QUESTO LIMITE ESPRIME IL FATTO CHE A^n "VINCE" SU n

Questo limite si può ottenere dal precedente ragionando come segue:

$\forall n \quad A^n - n = n\left(\frac{A^n}{n} - 1\right)$. Per quanto detto prima

$\frac{A^n}{n} \to +\infty$. Se conosciamo i teoremi di calcolo dei limiti, otteniamo

(1) $\frac{A^n}{n} - 1 \to +\infty$ (TEOREMA SULLA SOMMA)

(2) $n \to +\infty$ (lo so)

(3) $n\left(\frac{A^n}{n} - 1\right) \to +\infty$ (TEOREMA SUL PRODOTTO)

VEDIAMO DI DIMOSTRARE $\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{n} = +\infty$ $(A > 1)$

COME PRIMA SCRIVO $A = 1 + \delta$ con $\delta > 0$

$$\frac{A^n}{n} = \frac{(1+\delta)^n}{n}$$

Per dim. che $\frac{A^n}{n} \to +\infty$, devo far vedere che $\forall K \in \mathbb{R}$

$$\frac{(1+\delta)^n}{n} > K \quad \text{DEFINITIVAMENTE}$$

Se sviluppo $(1+\delta)^m$ col binomio di Newton trovo.

$$\underbrace{\binom{m}{0}1^m\delta^0}_{=1}+\underbrace{\binom{m}{1}1^{m-1}\delta^1}_{=m\delta}+\binom{m}{2}1^{m-2}\delta^2+\text{altra roba}\geq 0$$

dunque $$(1+\delta)^m \geq 1+m\delta+\frac{m(m-1)}{2}\delta^2 \geq \frac{m(m-1)}{2}\delta^2$$

$$\binom{m}{2}=\frac{m!}{2!(m-2)!}=\frac{\overbrace{1\cdot 2\cdots m}}{(1\cdot 2)\underbrace{(1\cdot 2\cdots m-2)}}=\frac{(m-1)m}{2}$$

Allora per avere $\dfrac{(1+\delta)^m}{m}>K$, basta $\boxed{\dfrac{\frac{\cancel{m}(m-1)}{2}\delta^2}{\cancel{m}}>K}$

Quest'ultimo diventa $\dfrac{(m-1)}{2}\delta^2>K \iff m>\dfrac{2K}{\delta^2}+1$

VERA DEFINITIVAMENTE

IN MANIERA ANALOGA ⊛ (utilizzando più termini dello sviluppo del binomio)

$$\boxed{\lim_{m\to\infty}\frac{A^m}{m^K}=+\infty} \quad \text{se } A>1 \quad K\in\mathbb{N}$$

INTERPRETAZIONE A^m "DIVERGE" PIÙ VELOCEMENTE DI QUALUNQUE POTENZA

(*) IDEA: $(1+\delta)^n \geq \binom{n}{k+1} \delta^{k+1}$ ← polinomio di grado $k+1$

$$\frac{(1+\delta)^n}{n^k} \geq \text{polinomio di grado } 1 \ldots$$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{A} = 1} \qquad A \in \mathbb{R},\quad A > 0$$

DIM. Se $A = 1$ è ovvio! Mettiamo che $A > 1$

Devo far vedere che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad \forall n \geq \bar{n}$

$$\underbrace{1 - \varepsilon < \sqrt[n]{A}}_{\text{vale } \forall n \text{, dato che } A > 1} < 1 + \varepsilon \qquad \text{rimane} \quad \boxed{\sqrt[n]{A} < 1 + \varepsilon}$$

$\Longleftrightarrow$ DEFINITIVAM. $A < (1+\varepsilon)^n$

Se $\varepsilon > 0$ è fissato so CHE $(1+\varepsilon)^n \to +\infty \Longrightarrow$

$\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad (1+\varepsilon)^n > A$ QUELLO CHE VOLEVO!

II CASO $0 < A < 1$ si fa in modo simile ← OPPURE (SE CONOSCO I TEOREMI DI CALCOLO DEI LIMITI)

$0 < A < 1 \iff \frac{1}{A} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{A}} \to 1$, PASSANDO AL RECIPROCO

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{A}}} \to \frac{1}{1} \quad \text{cioè} \quad \sqrt[n]{A} \to 1$$

NOTA si può scrivere $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\frac{1}{n}} = 1 \ (= A^0)$ se $A>0$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

$\left(n^{\frac{1}{n}} \to 1 \right.$, se $\left. n \to +\infty \right)$

DIM. Dato $\varepsilon > 0$ voglio dim. che

$$\underbrace{1-\varepsilon < \sqrt[n]{n}}_{\text{VERA se } n \geq 1} < 1+\varepsilon \quad \text{DEFINITIVAMENTE}$$

$\Leftarrow \quad n < (1+\varepsilon)^n$ DEFINITIVAMENTE

$\iff \quad 1 < \frac{(1+\varepsilon)^n}{n}$ DEFINITIVAMENTE

Dato che $\varepsilon > 0 \Rightarrow 1+\varepsilon > 1 \Rightarrow \frac{(1+\varepsilon)^n}{n} \to +\infty$ quindi è VERA

CONSEGUENZA (USANDO I TEOREMI SUI LIMITI)

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1}$$

per qualunque $K \in \mathbb{N}$ $\quad$ K FISSATO

$$\sqrt[n]{n^k} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^k \to 1^k = 1$$

(PRODOTTO DI LIMITI)

RIASSUNTO

- $\lim_{n \to +\infty} A^n = 0$ se $0 < A < 1$
- $\lim_{n \to +\infty} A^n = +\infty$ se $A > 1$
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{A^n}{n^k} = +\infty$ se $A > 1$, $K \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n \to +\infty} n^k A^n = 0$ se $0 < A < 1$, $K \in \mathbb{N}$ (come mai?)
- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{A} = 1$ se $0 < A$
- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$ se $K \in \mathbb{N}$

NOMENCLATURA $\{a_n\}$ successione:

- $\{a_n\}$ HA LIMITE significa che il limite esiste in $\overline{\mathbb{R}}$
- $\{a_n\}$ CONVERGE significa che il limite esiste FINITO (in $\mathbb{R}$)
- $\{a_n\}$ DIVERGE se $a_n \to +\infty$ oppure $a_n \to -\infty$
- $\{a_n\}$ è IRREGOLARE / INDETERMINATA se non esiste $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$

CONTINUAZIONE PROPRIETÀ DEI LIMITI

(D) Se $\{a_n\}$ converge ($\exists$ limite finito) $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ è LIMITATA (NON VALE IL VICEVERSA)

(DIM. NON RICHIESTA)

CONTROESEMPIO Se $a_n = (-1)^n$, allora $\{a_n\}$ NON HA LIMITE. PERÒ $\{a_n\}$ è LIMITATA, dato che

$$-1 \leq a_n \leq 1$$

(E) (SOMMA / PRODOTTO DI LIM.) Date $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Se

$$a_n \to \ell_1 \qquad b_n \to \ell_2 \qquad \text{con } \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$$

ALLORA

$$a_n + b_n \to \ell_1 + \ell_2 \quad / \quad a_n \cdot b_n \to \ell_1 \cdot \ell_2$$

DIMOSTRIAMO IL CASO DELLA SOMMA

So che $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell_1$, $\lim_{n \to \infty} b_n = \ell_2$.

(VOGLIO DIM. $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \ell_1 + \ell_2$)

FISSO $\varepsilon > 0$, SO CHE:

(I) $\exists\, \bar{n}_1 : \forall n \geq \bar{n}_1 \quad \ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2}$

(se lo so per $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ lo so per $\frac{\varepsilon}{2}$). Lo faccio anche per b_n:

(II) $\exists\, \bar{n}_2 : \forall n \geq \bar{n}_2 \quad \ell_2 - \frac{\varepsilon}{2} < b_n < \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2}$

Se prendo $n \geq \max(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$ valgono entrambe I e II e quindi le posso sommare. OTTENGO:

$$\forall n \geq \max(\bar{n}_1, \bar{n}_2) \quad \underbrace{\ell_1+\ell_2 - \varepsilon < a_n + b_n < \ell_1+\ell_2+\varepsilon}_{}$$

DEFINIZIONE DI " $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \ell_1 + \ell_2$ "

(E') (casi infiniti)

CONVENZIONI

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

se $x \in \mathbb{R}$ $\quad +\infty + x = +\infty$

se $x \in \mathbb{R}$ $\quad -\infty + x = -\infty$

ALLORA IL TEOREMA

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

VALE ANCORA SE "RICADO NEI CASI PREVISTI DALLA CONVENZ."

NON POSSO DIRE NULLA "IN GENERALE" SE TROVO $(+\infty)+(-\infty)$

CIOÈ se $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ sono due succ. tali che

$a_n \to +\infty$ e $b_n \to -\infty$

NON POSSO PREVEDERE (CON UN TEOREMA GENERALE)

COSA FACCIA $a_n + b_n$

PER TROVARE $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n$ DEVO SAPERE QUALCOS'ALTRO su a_n e b_n

ESEMPI

(1) $a_n = n$ $\qquad b_n = -n$

$a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$ $\qquad a_n + b_n \ (= 0 \ \forall n) \to 0$

(2) $a_n = n+1$ $\qquad b_n = -n$

$a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$

$a_n + b_n = 1 \ \forall n \implies a_n + b_n \to 1$

(3) $a_n = n^2$ $\qquad b_n = -n$

$a_n \to +\infty$ $\qquad b_n \to -\infty$

$a_n + b_n = n^2 - n \to +\infty$ (si vede usando la def. oppure scrivendo $n^2 - n = n(n-1)$ prodotto di due infiniti!

(4) $a_n = n$ $\qquad b_n = -n + (-1)^n$

Si può vedere (usando i teoremi sui limiti ...) che

$a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$ MA $a_n + b_n = (-1)^n$
che NON HA LIMITE

(CONTINUANDO)

CONVENZIONI (SUI PRODOTTI)

Se $\ell > 0$ $\qquad +\infty \cdot \ell = +\infty$
(anche $\ell = +\infty$) $\qquad (-\infty) \cdot \ell = -\infty$

Se $\ell < 0$ $\qquad (+\infty) \cdot \ell = -\infty$
(anche $\ell = -\infty$) $\qquad (-\infty) \cdot \ell = +\infty$

VALE IL TEOREMA $\lim_{n \to +\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \to \infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n \to \infty} b_n\right)$

SE RICADO NELLE CONVENZIONI!

NON POSSO DIRE NIENTE (IN GENERALE) QUANDO INCONTRO

$0 \cdot +/- \infty$

Espressioni di questo tipo potrebbero dare un qualunque risultato

A SECONDA DEI CASI. (NO DIM.)

(F) (QUOZIENTE) So $a_n \to \ell_1$, $b_n \to \ell_2$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$

$\underline{\ell_2 \neq 0}$, allora

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

(NO DIM.)

(F') CASO $a_n \to \ell$ $b_n \to 0$. COSA SUCCEDE

DI $\frac{a_n}{b_n}$??

I° RICHIESTA. <u>VOGLIO</u> $b_n \neq 0$ DEFINITIVAMENTE

IN QUESTO MODO $\frac{a_n}{b_n}$ È DEFINITA (DEFINITIVAMENTE)

(se non è definita non posso pormi il problema del suo limite)

II° FATTO ANCHE $b_n \neq 0 \ \forall n$ può succedere che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \text{NON ESISTA}$$

Per esempio $b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{per } n \text{ pari} \\ -\frac{1}{n} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

$b_n = \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$

Si vede che questa b_n tende a zero

Però $\frac{1}{b_n} = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ PARI} \\ -n & \text{se } n \text{ DISPARI} \end{cases}$ NON HA LIMITE

BISOGNA AGGIUNGERE UNA DEFINIZIONE Data $\{a_n\}$

Def Dato $\ell \in \mathbb{R}$ dico che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell^+$

se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ e inoltre $a_n > \ell$ DEFINITIVAMENTE

(ESEMPIO $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0^+$) (scrivo anche $a_n \to \ell^+$)

Analogamente dire $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell^-$ ($a_n \to \ell^-$) significa.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ e inoltre $a_n < \ell$ DEFINIT.

ALLORA POSSO DIRE:

(F1) Se $a_n \to \ell > 0$, $b_n \to 0^+$ (dunque $b_n \neq 0$ definit.)

ALLORA $\dfrac{a_n}{b_n} \to +\infty$

Se $a_n \to \ell > 0$, $b_n \to 0^-$ $\Rightarrow$ $\dfrac{a_n}{b_n} \to -\infty$

Se $\ell < 0$ si scambiano $+\infty$ con $-\infty$ ..

CASO PIÙ SEMPLICE:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se } b_n \to 0^+ \Rightarrow \dfrac{1}{b_n} \to +\infty \\ \text{Se } b_n \to 0^- \Rightarrow \dfrac{1}{b_n} \to -\infty \end{array}}$$

$\left(\dfrac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \dfrac{1}{b_n} \; .. \right)$

INOLTRE

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se } b_n \to +\infty \Rightarrow \dfrac{1}{b_n} \to 0^+ \\ \text{Se } b_n \to -\infty \Rightarrow \dfrac{1}{b_n} \to 0^- \end{array}}$$

A QUESTO PUNTO SI PUÒ DIRE COSA SUCCEDE

di $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$

ECCETTO NEI CASI DI INDETERMINAZIONE