Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 7, 19 ottobre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

LIMITE DI SUCCESSIONI.

Def. Chiamo "SUCCESSIONE" (di numeri reali) una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (sono definiti i valori $a(1), a(2) \dots$

CONVENZIONE Invece di scrivere $a(1)$ scrivo a_1, $a(2) \rightsquigarrow a_2$ e così via.. $a_n = a(n)$.

Invece di a scrivo $\{a_n\}$ (per indicare la succ.)
$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

ESEMPIO $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

LA SUCC. si indica con $\left\{ \dfrac{1}{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$;

I "termini" della succ. sono

$$\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, \quad \underset{\substack{\uparrow \\ n=1}}{\frac{1}{2}}, \quad \underset{\substack{\uparrow \\ n=2}}{\frac{1}{3}}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n+1}, \quad \dots$$

DEF. Supponiamo che $P(n)$ sia una proprietà definita per $n \in \mathbb{N}$. Dico che:

"$P(n)$ È DEFINITIVAMENTE VERA"

se $\boxed{\exists\ \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n} \quad P(n) \text{ è vera}}$

($P(n)$ è vero da un certo n in poi)

ES.

- $P(n)$ = " n è PARI "

NON È DEFINITIVAMENTE VERA

- $P(n)$ = " $n^2 \geq 100\, n$ "

$P(1)$ FALSA

$P(5) = 25 \geq 500$ FALSA

$P(100)$ VERA : $100^2 \geq 100 \cdot 100$ OK

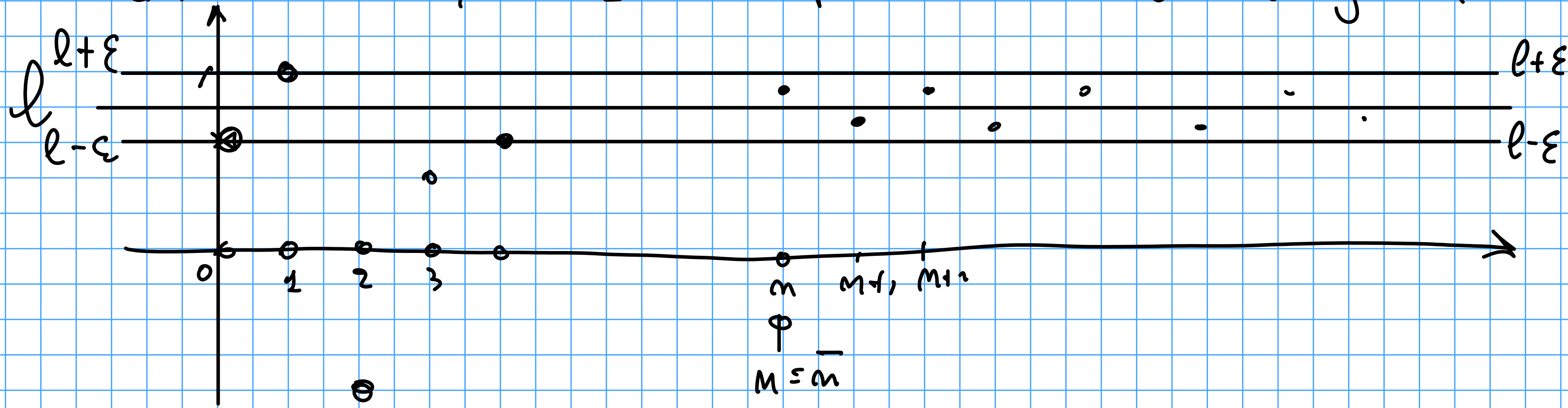
Se $n \geq 100 \Rightarrow n(n-100) \geq 0 \Rightarrow P(n)$ VERA

$P(n)$ è vera DEFINITIVAMENTE

IDEA DI LIMITE : Data $\{a_n\}$ voglio esprimere il fatto che a_n si avvicina a un numero $\ell \in \mathbb{R}$, al crescere di n.

$\leadsto$ Al posto di ℓ considero un intervallo $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ con $\varepsilon > 0$, CHIEDO CHE

$a_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ per n abbastanza grande



DEF. Si dice che $\{a_n\}$ tende a ℓ $(\ell \in \mathbb{R})$, o che $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad \text{DEFINITIVAMENTE}$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \right)$$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$

ESEMPIO La successione $\left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$ HA LIMITE 0.

DIM. Devo far vedere che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}$ tale che

$$\forall n \geq \bar{n} \quad \underbrace{0 - \varepsilon < \frac{1}{n+1}}_{\text{vero } \forall n} < 0 + \varepsilon$$

Per avere $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \iff n > -1 + \frac{1}{\varepsilon}$

Basta prendere $\bar{n}$ in modo che $\boxed{\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1}$

(lo trovo perché $\mathbb{N}$ non è limitato sup.)

$\implies$ per $n \geq \bar{n} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

e quindi ho verificato la def. di limite.

Per dim. che $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ devo trovare $\bar{n}$ $(\in \mathbb{N})$ in termini di ε (>0), che faccio . . . .

ESEMPIO $a_n = \frac{2n}{n+2}$. Dimostriamo che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{n+2} = 2$$

Per fare ciò bisogna dim. che:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \qquad 2 - \varepsilon < \dfrac{2n}{n+2} < 2 + \varepsilon$

($\forall \varepsilon$ devo trovare $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$, tale che sia vero)

I) $\forall n \qquad \dfrac{2n}{n+2} < \dfrac{2n}{n} = 2$ Quindi

$\dfrac{2n}{n+2} < 2$ è vero $\forall n$

II) Dimostrare $\quad 2 - \varepsilon < \dfrac{2n}{n+2} \iff$

$$(2-\varepsilon)(n+2) < 2n \iff$$

$$(2-\varepsilon)n + 2(2-\varepsilon) < 2n \iff$$

$$2(2-\varepsilon) < \varepsilon n \iff$$

$$n > \frac{2(2-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

Posso allora prendere $\bar{n} > \dfrac{2(2-\varepsilon)}{\varepsilon}$

($\bar{n}$ dipende da ε. Più ε è piccolo più $\bar{n}$ è grande)

e per i conti fatti si ha che $n \geq \bar{n} \ \ldots \ \dfrac{2n}{n+2} > 2 - \varepsilon$

⇒ HO VERIFICATO LA DEF. DI LIMITE.

A QUESTO PUNTO BISOGNA:

(a) Trovare alcuni limiti elementari (usando la definizione)

(b) Trovare dei teoremi "di calcolo" che permettano di ricondurre un limite complicato a uno elementare

PROPRIETÀ DEI LIMITI

(UNICITÀ DEL LIMITE)

(A) Il limite (se esiste) è unico.

Data una succ. $\{a_n\}$, se $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \ell_1 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} a_n = \ell_2$$

ALLORA $\ell_1 = \ell_2$

(B) (CONFRONTO). Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni. Se $a_n \leq b_n$ DEFINITIVAMENTE

e se

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \ell_1 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} b_n = \ell_2 \quad (\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R})$$

ALLORA $\ell_1 \leq \ell_2$.

ATTENZIONE: Se $a_n < b_n$ (DEF.) NON È DETTO CHE $\ell_1 < \ell_2$ (mentre di sicuro $\ell_1 \leq \ell_2$)

Per esempio $b_n = \frac{1}{n+1}$ $a_n = 0$, $b_n > a_n \ \forall n$

MA $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$ $(= 0)$

(C) Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni; se

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \ell_1 , \quad \lim_{n \to \infty} b_n = \ell_2 \quad \text{e se} \quad \ell_1 < \ell_2$$

ALLORA $a_n < b_n$ DEFINITIVAMENTE.

(PERMANENZA DEL SEGNO)

ATTENZIONE: Se ho solo $\ell_1 \leq \ell_2$ NON POSSO RICAVARE $a_n \leq b_n$ DEF.

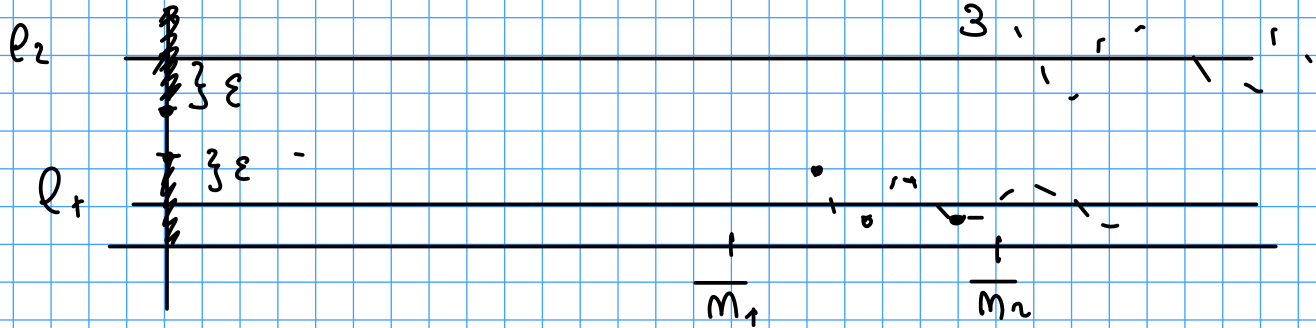
(D) . . . (lo vediamo . . .)

DIMOSTRIAMO (ALCUNE DELLE) PROPRIETÀ SCRITTE.

(A) (unicità del limite) Per assurdo suppongo che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \ell_1 , \quad \lim_{n \to \infty} a_n = \ell_2 \quad \text{ma } \ell_1 < \ell_2$$

Posso prendere $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{3}$.



($\Rightarrow$ $]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[$ è staccato da $]\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon[$)

- Applico la def. di $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \ell_1$ con questo $\varepsilon > 0$.

TROVO $\overline{n}_1$ tale che $\forall n \geq \overline{n}_1 \quad \ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell_1 + \varepsilon$

- Applico la def. di $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \ell_2$ con lo stesso $\varepsilon > 0$.

TROVO $\overline{n}_2$ tale che $\forall n \geq \overline{n}_2 \quad \ell_2 - \varepsilon < a_n < \ell_2 + \varepsilon$

- Se considero $\overline{n} = \max(\overline{n}_1, \overline{n}_2) \Rightarrow \forall n \geq \overline{n}$ valgono entrambe: $\ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell_1 + \varepsilon$, $\ell_2 - \varepsilon < a_n < \ell_2 + \varepsilon$

IMPOSSIBILE DATO CHE $\ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon$

($\ell_2 - \ell_1 > 2\varepsilon$ VERA DATO CHE $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{3}$)

HO TROVATO UN ASSURDO $\Rightarrow$ ℓ_1 NON PUÒ ESSERE $\neq \ell_2$.

DIM. (B) (confronto) Suppongo $a_n \le b_n$ (definitiv.)

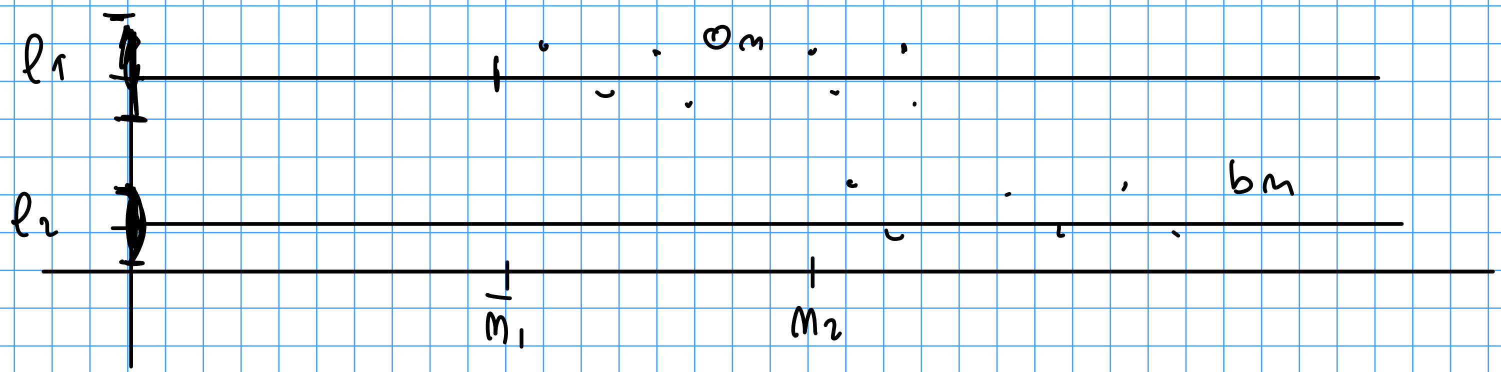
$\lim_n a_n = \ell_1$ $\lim_n b_n = \ell_2$

SE PER ASSURDO non fosse $\ell_1 \le \ell_2 \Rightarrow$

$\ell_1 > \ell_2$. Prendo $\varepsilon = \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{3}$. Applico

la definizione di limite:

- $\exists\, \bar{n}_1 : \forall n \ge \bar{n}_1 \quad \ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell_1 + \varepsilon \quad$ (i)
- $\exists\, \bar{n}_2 : \forall n \ge \bar{n}_2 \quad \ell_2 - \varepsilon < b_n < \ell_2 + \varepsilon \quad$ (ii)



- Se prendo $\bar{n} = \max(\bar{n}_1, \bar{n}_2) \Rightarrow \forall n \ge \bar{n}$ valgono entrambe (i) e (ii). Ma allora per $n \ge \bar{n}$

$$a_n > \ell_1 - \varepsilon > \ell_2 + \varepsilon > b_n$$

!! (per come è stato scelto ε)

IMPOSSIBILE DATO CHE, PER IPOTESI, $a_n \leq b_n$ def.
FINE DIM.

(in effetti ho anche dimostrato la (c)!)

NON FACCIAMO LA DIM. DI (c)

Conviene aggiungere la def. di "limiti infiniti"

<u>Def.</u> Data una successione $\{a_n\}$, dico che

(1) $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ (limite di $\{a_n\}$ è più inf.)

se $\forall K \in \mathbb{R}$ $a_n > K$ DEFINITIVAMENTE

$(\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad a_n > K)$

(2) $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$ (limite di $\{a_n\}$ è meno inf.)

se $\forall K \in \mathbb{R}$ $a_n < K$ DEFITIVAMENTE

$(\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad a_n < K)$

<u>ESEMPIO</u> $\lim_{n \to \infty} n = +\infty$

DIM. Dato $K \in \mathbb{R}$, prendo $\bar{n} > K$. Se ora

$n \geq \bar{n} \Rightarrow n > K$.

HO VERIFICATO LA DEF. DI $\lim_{n \to \infty} n = +\infty$

SI PUÒ DIM. CHE

(A) (B) (C) (quelle di prima) valgono anche ammettendo che ℓ sia $+\infty$ o $-\infty$

(DIMOSTRAZIONE NON RICHIESTA) ← ammettiamo che

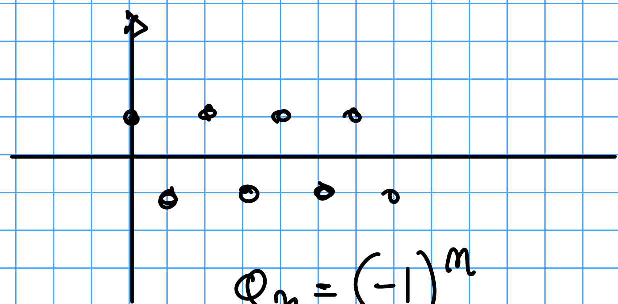
$-\infty < \ell < +\infty$ per ogni $\ell \in \mathbb{R}$

NOTAZIONE $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Se $\{a_n\}$ HA LIMITE $\Rightarrow$ il limite ℓ è in $\overline{\mathbb{R}}$

ATTENZIONE CI SONO SUCCESSIONI CHE **NON** HANNO LIMITE. Per esempio

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$



$a_0 = 1, \; a_1 = -1, \; a_2 = 1, \; a_3 = -1 \; \dots$

$a_n = (-1)^n$

COME SI VEDE CHE $(-1)^n$ NON HA LIMITE ??

SUPPONIAMO CHE CI SIA $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

$$\ell = \lim_{n \to \infty} (-1)^n$$

Posso prendere $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (>0). Dalla def. di limite ricavo che $\exists \, \bar{n}$ tale che

$$\forall n \geq \bar{n} \qquad \ell - \frac{1}{2} < (-1)^n < \ell + \frac{1}{2}$$

Se $n \geq \bar{n}$, n PARI VIENE $\quad \ell - \frac{1}{2} < 1 < \ell + \frac{1}{2}$

se $n \geq \bar{n}$, n DISPARI VIENE $\quad \ell - \frac{1}{2} < -1 < \ell + \frac{1}{2}$

LA seconda può essere scritta $\quad -\ell + \frac{1}{2} > 1 > -\ell - \frac{1}{2}$
(moltiplico per -1)

(LA GIRO E) SOMMO $\Rightarrow \quad -1 < \underbrace{2 < 1}_{\text{IMPOSSIBILE}}$

(Se $a_n = (-1)^n$ allora tra due termini consecutivi c'è una distanza pari a 2. È dunque impossibile che siano entrambi in $\left[\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}\right]$

DUNQUE $\nexists \lim_{n\to\infty} (-1)^n$

- Alcune considerazioni

(1) Posso chiamare "successione" una funzione $a : \{n_0, n_0+1, \dots\} \to \mathbb{R}$ (definita solo sugli interi $n \geq n_0$)

In questo modo $\frac{1}{n-5}$ è una succ.

TUTTE LE DEF. HANNO ANCORA SENSO

(2) Se $a_n = b_n$ DEFINITIVAMENTE

allora $\{a_n\}$ HA LIMITE $\Leftrightarrow$ $\{b_n\}$ HA LIMITE

e i due limiti coincidono.

Il limite dipende "dagli a_n con n grande"

(3) Per brevità scriveremo spesso $a_n \to \ell$

per indicare che $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$

($n \to +\infty$ è sottinteso, dato che $\{a_n\}$ è una successione)

ATTENZIONE

$$\frac{1}{n} \to 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

NON $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \to 0$

La successione "TENDE" a ℓ

Il limite "È UGUALE" a ℓ

Il limite NON TENDE (È GIÀ ARRIVATO ...)

ESERCIZI

- Dimostrare, usando la definizione, che

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = +\infty$

$+\infty$

- Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ NON ESISTE

- Consideriamo la succ. $\{a_n\}$ definita ricorsivamente:

$$\begin{cases} a_0 = 1/2 \\ a_{n+1} = (a_n)^2 \end{cases}$$

(a) TROVARE UN'ESPRESSIONE ESPLICITA DI $\{a_n\}$

(b) TROVARE $\lim_{n\to\infty} a_n$