Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 6, 13 ottobre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

- $n! \; (:= 1 \cdot 2 \cdots n)$ = numero di permutazioni di n elementi

$$= \# \{ \sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}, \; \sigma \text{ bigettiva} \}$$

($\#A$ numero di elementi di A)

- $\dfrac{n!}{(n-k)!} = \# \{ \text{disposizioni di } n \text{ oggetti in } k \text{ posti} \}$ $(k \leq n)$

$$= \# \{ \sigma : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}, \; \sigma \text{ iniettiva} \}$$

(se $k = n$ ritrovo $n!$ – dato che $0! = 1$)

- $\dbinom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \# \{ \text{combinazioni di } n \text{ oggetti in } k \text{ posti} \}$

$$= \# \{ \sigma : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\} \;\; \sigma \text{ strett. crescente} \}$$

$$= \# \{ B : B \subset \{1, \dots, n\} \text{ e } \#B = k \}$$

PROPRIETÀ DEL BINOMIALE:

- $\dbinom{n}{n} = \dbinom{n}{0} = 1$ (basta fare il conto) interpretazione: Se $A = \{1, .., n\}$ esiste un solo $B \subset A$ con $\# B = n$ (cioè $B = A$) ed esiste un solo $B \subset A$ con $\# B = 0$, cioè $B = \emptyset$

- $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ← Basta guardare la def. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ sono "="

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}$$

interpretazione: ogni sottoinsieme $B \subset \{1 \dots n\}$ con k elementi INDIVIDUA UNO E UNO SOLO $B' \subset \{1 \dots n\}$ con $n-k$ elem.
CIOE' B' = COMPLEMENTARE DI B.

- $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ allora:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

INFATTI

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n+1-k)!} =$$

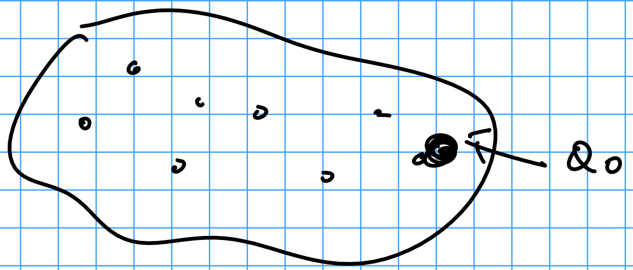
$$\frac{n!}{k\,(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n+1-k)\,(n-k)!} =$$

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1-k}\right) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\cdot\frac{n+1-\cancel{k}+\cancel{k}}{k\,(n+1-k)} =$$

$$\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

DUNQUE $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$$

<u>INTERPRETAZIONE</u> Prendiamo A con $\# A = n+1$



FISSIAMO UN ELEMENTO $a_0 \in A$

POSSO CLASSIFICARE I SOTTOINSIEMI $B \subset A$ IN DUE GRUPPI:

i B tali che $a_0 \in B$ / i B tali che $a_0 \notin B$

Allora $$\{B : \# B = k\} = \underbrace{\{B : \# B = k,\ a_0 \in B\}}_{\mathcal{B}_1} \cup \underbrace{\{B : \# B = k,\ a_0 \notin B\}}_{\mathcal{B}_2}$$

quanti elementi ha $\mathcal{B}_1$?

$$\#\mathcal{B}_1 = \#\{B_1 \subset \underbrace{A\setminus\{a_0\}}_{n \text{ elementi}},\ \#B_1 = k-1\} = \binom{n}{k-1}$$

$$\#\mathcal{B}_2 = \#\{B_2 \subset A\setminus\{a_0\},\ \#B_2 = k\} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad 1 \le k \le n$$

NOTA: $\binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n+1}{0}$

NE RICAVIAMO IL "TRIANGOLO DI TARTAGLIA"

$$\begin{array}{l ccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$$\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0} = 1 + 1$$

(PROCEDIMENTO RICORSIVO PER COSTRUIRE I BINOMIALI)

• Si potrebbe vedere (per induzione) che

$p(n) = \binom{n}{k}$ è un polinomio di grado k

$$p(n) = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ fattori}}}{k!} = \frac{n^k}{k!} + \text{termini di grado} < k$$

• VALE LA FORMULA (BINOMIO DI NEWTON)

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}} =$$

$$\binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \binom{n}{n} a^n b^0$$

$$= b^n + n a b^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + n a^{n-1} b + a^n$$

PER ES. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$

IDEA DI DIM: $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ volte}}$

a^n COMPARE 1 VOLTA SCEGLIENDO SEMPRE a in ogni prodotto

$a^{n-1}b$ COMPARE n VOLTE, scegliendo b in uno degli n posti

$a^{n-2}b^2$ LO TROVO SCEGLIENDO b DUE VOLTE TRA LE n

TALI SCELTE SONO TANTE QUANTI I MODI DI FORMARE UN INSIEME DI DUE ELEM. SCEGLIENDO TRA n

$\Rightarrow$ $a^{n-2} b^2$ ho il coeff. $\binom{n}{2}$!

SE VOGLIO UNA DIM. RIGOROSA DEVO USARE L'INDUZIONE!

DIM.

VOGLIO DIM. $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}} \leftarrow P(n)$

- $P(0)$ $(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$ cioè

$1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 \quad (=1)$ VERA

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ AMMETTIAMO CHE VALGA LA FORMULA PER n.

MOLTIPLICO TUTTO PER $(a+b)$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a\, a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b\, b^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = (*)$$

NELLA PRIMA SOMMATORIA PONGO $k+1 = h \iff k = h-1$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{h} b^{n-(h-1)} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{k} b^{n+1-k}$$

posso di nuovo chiamare k l'indice

DUNQUE

$$\circledast = \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{k} b^{n+1-k}}_{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{k} b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^{0}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k}}_{+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^{0} b^{n+1}} =$$

$k = n+1$ nella I° sommatoria

$k = 0$ nella II° sommatoria

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\underbrace{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}_{= \binom{n+1}{k}} \right] a^{k} b^{n+1-k} + b^{n+1} =$$

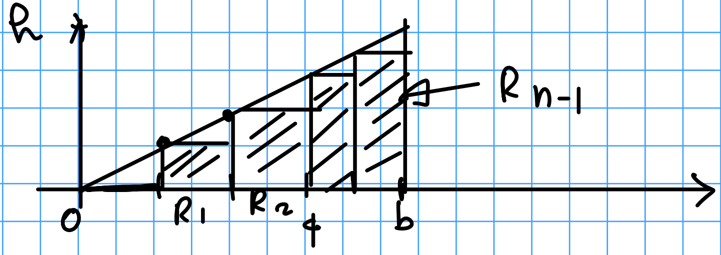
$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{k} b^{n+1-k} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{k} b^{n+1-k}$$

se metto $k=0$ viene b^{n+1}, se metto $k=n+1$ viene a^{n+1}

⇒ HO TROVATO LA FORMULA CON M+! FINE

ABBIAMO VISTO $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Prendiamo un triangolo



Dividiamo la base in n sottointervalli di ampiezza uguale $\frac{b}{n}$

e costruiamo i rettangoli come nella figura

R_0 area nulla

R_1 ha area $\frac{b}{n}\cdot\frac{h}{n}$

R_2 ha area $\frac{b}{n}\cdot\frac{2h}{n}$

R_3 ha area $\frac{b}{n}\cdot\frac{3h}{n}$

⋮

R_K ha area $\frac{b}{n}\cdot\frac{K}{n}h$

SOMMO → $\displaystyle\sum_{K=1}^{n-1} \frac{b}{n}\frac{K}{n}h =$ (formula sopra)

$$\frac{b\cdot h}{n^2}\sum_{K=1}^{n-1} K = \frac{b\cdot h}{n^2}\,\frac{(n-1)n}{2} = \frac{b\cdot h}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

VOGLIO TROVARE $\sum_{i=0}^{n} i^2 \quad (= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \Rightarrow p_2(n)$

<u>CONGETTURA</u> $\quad p_2(n) =$ polinomio di grado 3 in n.

SE È COSÌ $\Rightarrow \quad p_2(n) = a n^3 + b n^2 + c n + \cancel{d}$

Dato che $p_2(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

IL POLINOMIO DEVE VERIFICARE

$$p_2(n+1) = p_2(n) + (n+1)^2$$

← IMPONGO QUESTA CONDIZIONE PER TROVARE a, b, c

$$a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) = a n^3 + b n^2 + c n + (n+1)^2$$

SVILUPPANDO

$$a(\cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1) + b(\cancel{n^2} + 2n + 1) + c(\cancel{n} + 1) =$$
$$a\cancel{n^3} + b\cancel{n^2} + c\cancel{n} + n^2 + 2n + 1$$

$$(3a - 1)n^2 + (3a + 2b - 2)n + a + b + c - 1 = 0$$

$\Longleftrightarrow \quad a = \frac{1}{3} \quad b = \frac{1}{2} \quad c = \frac{1}{6}$

L'UNICO POL. DI GRADO 3° con $p(0)=0$ che rende vero $P(n+1) = P(n) + (n+1)^2$ è

$$p(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n}{6}\left(2n^2 + 3n + 1\right) = \boxed{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}$$

POSSO DIRE CHE $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) = \sum_{k=0}^{n} i^2$

SÌ PERCHÉ LA FORMULA SCRITTA:

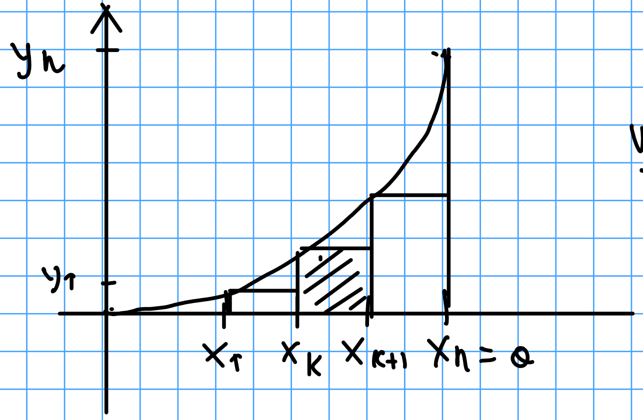
- VALE SE $n=0$
- se vale per $n \Rightarrow$ vale per $n+1$ dato che

PER INDUZIONE LA FORMULA È VERA $\forall n$!!

CONSEGUENZA GEOMETRICA

consideriamo la parabola $y = bx^2$ per $x \in [0, a]$

DIVIDO $[0, a]$ in n parti eguali di lunghezza $\frac{a}{n}$



$y = bx^2$

introduco i punti

$x_0 = 0 \longrightarrow y_0 = 0$

$x_1 = \dfrac{a}{n} \longrightarrow y_1 = \dfrac{ba^2}{n^2}$

$x_2 = \dfrac{2a}{n} \longrightarrow y_2 = \dfrac{ba^2}{n^2} \cdot 2^2$

$x_k = \dfrac{ka}{n} \longrightarrow y_k = \dfrac{ba^2}{n^2} \cdot k^2$

$x_n = a \longrightarrow y_k = ba^2$

Se calcolo l'area del rettangolo k-esimo $(k = 0 \dots \underline{n-1})$

trovo $\underset{\uparrow \text{ base}}{\dfrac{a}{n}} \cdot \dfrac{ba^2}{n^2} \cdot k^2 \Longrightarrow$ AREA COMLESSIVA VIENE

$(n-1)\, n\, (2n-1)$

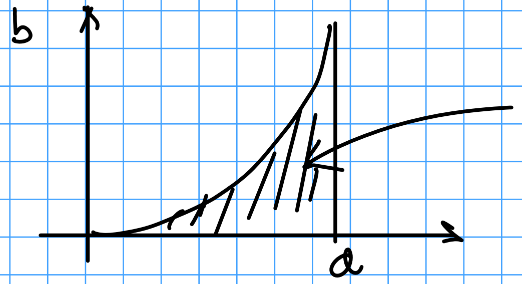
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n} \frac{ba^2}{n^2} k^2 = \frac{a^3 b}{n^3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{a^3 b}{n^3} \frac{(n-1)(n)\left(2(n-1)+1\right)}{6}$$

$$\frac{a^3 b}{6} \frac{(2n-1)(n-1)}{n^2} = \frac{ba^3}{6}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{ba^3}{3}\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$$

Se prendo il $\underline{\text{SUP}}$ di queste aree, al variare di $n \in \mathbb{N}$,

TROVO $\dfrac{ba^3}{3}$ = area del "segmento di parabola"

⊗ $\left(\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right.$; se metto $n-1$ . . .)



$b\frac{a^3}{3}$

$\sum_{k=0}^{n} k^3 = ??$ POTREI CERCARE UN POLINOMIO DI GRADO 4 $p(n)$ tale che $p(0)=0$, $p(n+1) = p(n) + (n+1)^3$

(se lo trovo, l'induzione mi garantisce che è quello giusto)

PROVARE PER ESERCIZIO

MI PIACEREBBE TROVARE QUALCOSA SU $P_k(n) := \sum_{i=0}^{n} i^k$

(k intero)

$P_k(n) := 0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$

SO $\boxed{P_k(n+1) = P_k(n) + (n+1)^k}$ + $\left(P_k(0) = 0 \right|$

INOLTRE (USANDO LE PROPRIETÀ DELLE SOMMATORIE)

$$P_k(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i^k = \sum_{i=0}^{n} (i+1)^k = \text{(binomio di Newton)}$$

ci sarebbe anche $i = -1$, ma non conto nella somma

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} i^h \cdot \overset{1}{\overset{\shortparallel}{1^{k-h}}} \right)$$

somma delle potenze h-esime

$$\sum_{\substack{i=0 \dots n \\ h=0 \dots k}} \binom{k}{h} i^h = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \left(\sum_{i=0}^{n} i^h \right) = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} P_h(n)$$

HO TROVATO

$$\rightarrow \quad P_k(n+1) = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} P_h(n) = \underbrace{\overset{h=k}{P_k(n)} + \sum_{h=0}^{k-1} \binom{k}{h} P_h(n)}_{\circledast}$$

(per esempio $P_5(n+1) = P_5(n) + 5P_4(n) + 10P_3(n) + 10P_2(n) + 5P_1(n) + P_0(n)$)

AGGIUNGO CHE $P_k(n+1) = P_k(n) + (n+1)^k = \circledast$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{h=0}^{k-1} \binom{k}{h} P_h(n) = (n+1)^k}$$

OPPURE

$$\boxed{\sum_{h=0}^{K} \binom{K+1}{h} P_h(m) = (m+1)^{K+1}}$$

$\underline{K=0}$

$$P_0(m) = m+1 \qquad \left(\sum_{i=0}^{m} i^0 = \sum_{i=0}^{m} 1 = m+1 \right)$$

$\underline{K=1}$

$$\binom{2}{0} P_0(m) + \binom{2}{1} P_1(m) = (m+1)^2 \iff$$

$$(m+1) + 2P_1(m) = (m+1)^2 \iff$$

$$P_1(m) = \frac{(m+1)^2 - (m+1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

$\underline{K=2}$

$$\binom{3}{0} P_0(m) + \binom{3}{1} P_1(m) + \binom{3}{2} P_2(m) = (m+1)^3$$

$$m+1 + 3\,\frac{m(m+1)}{2} + 3P_2(m) = (m+1)^3$$

$$P_2(m) = \frac{(m+1)^3}{3} - \frac{m(m+1)}{2} - \frac{m+1}{3} = \frac{(m+1)\left[2(m+1)^2 - 3m - 2\right]}{6} =$$

$$\frac{(m+1)}{6}\left[2m^2 + 4m + 2 - 3m - 2\right] = \frac{(m+1)(2n^2+m)}{6} =$$

$$\frac{(m+1)(2n+1)m}{6}$$

$k = 3 \leadsto \boxed{\sum_{h=0}^{k} \binom{k+1}{h} p_h(n) = (n+1)^{k+1}}$

$$\binom{4}{0} p_0(n) + \binom{4}{1} p_1(n) + \binom{4}{2} p_2(n) + \binom{4}{3} p_3(n) = (n+1)^4$$

$$n+1 + 4\,\frac{n(n+1)}{2} + 6\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 p_3(n) = (n+1)^4$$

$$4 p_3(n) = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) =$$

$$(n+1)\left[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1 \right] =$$

$$(n+1)\left[n\left((n+1)^2 + (n+1) + 1\right) - n(2n+1) - 2n \right] =$$

$$(n+1)\,n \left[(n+1)^2 + (n+1) + 1 - (2n+1) - 2 \right] =$$

$$(n+1)\,n \left[n^2 + \cancel{2n} + \cancel{1} + n + \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{2n} - \cancel{1} - \cancel{2} \right] =$$

$$(n+1)^2 n^2 \implies p_3(n) = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}$$

PROVIAMO A VEDERE SE TORNA CON $M = 3$

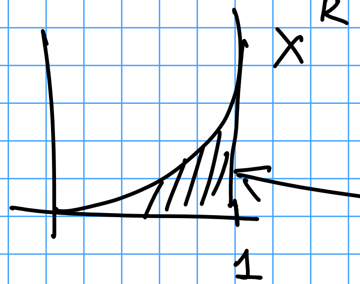
$$1^3+2^3+3^3 = 1+8+27 = 36 = \frac{(4\cdot 3)^2}{4} = 36 \quad \underline{\underline{OK}}$$

INFORMAZIONE ABBASTANZA IMPORTANTE

$$p_k(n) = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \text{polinomio di grado } k \text{ in } n$$

(si può ricavare – per induzione – dalla formula di prima)

$\Longrightarrow$



$$\text{AREA} = \frac{1}{k+1}$$

Lo si può dim. usando il sistema di prima (divido in n parti, calcolo l'area dei rettangoli e vedo cosa c'è se n è grande)