Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 5, 12 ottobre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

NUMERI NATURALI $\mathbb{N}$. Abbiamo detto:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ tale che

(a) $0 \in \mathbb{N}$

(b) se $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$

(c) (principio di induzione)

Se $A \subset \mathbb{N}$, A verifica (a) e (b) $\Rightarrow A = \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ è il più piccolo sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con le proprietà (a) e (b) !!

$\Rightarrow$ PRINC. DI IND. versione II :

Se $P(n)$ è una proprietà sugli interi tale che

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a')} & P(0) \text{ è vera} \\ \text{(b')} & P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \forall n \end{array}\right\} \text{ ALLORA } \forall n\, P(n) \text{ è vera}$$

VEDIAMO LE PROPRIETÀ PRINCIPALI DI $\mathbb{N}$.

(1) $\mathbb{N}$ è unico — se ci fossero $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}'$ verificanti (a) (b) (c) $\Rightarrow$ $\mathbb{N} = \mathbb{N}'$ (ESERCIZIO)

(2) Se $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 0$

Dim. Chiamo $A = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 0 \}$. Allora

- $0 \in A$ (perché $0 \geq 0$)
- Se $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ (infatti $n+1 \in \mathbb{N}$, $n+1 \geq 0$ dato che $n \geq 0$)

Per la (c) si ha $A = \mathbb{N}$. FINE!

(3) Se $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0 \Rightarrow n-1 \in \mathbb{N}$

Dim. Prendo $A = \{ n \in \mathbb{N} : n-1 \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$

- $0 \in A$ (ovvio)
- Se $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ Infatti $(n+1) - 1 = n \in \mathbb{N}$

Per la (c) $A = \mathbb{N}$. FINE!

(4) Se $k \in \mathbb{N}$ $]k, k+1[\cap \mathbb{N} = \emptyset$
(non ci sono interi n con $k < n < k+1$)

Dim. Chiamo $A = \{ k \in \mathbb{N} :]k, k+1[\cap \mathbb{N} = \emptyset \}$

- $0 \in A$ cioè $\nexists\, n \in \mathbb{N}$ con $0 < n < 1$

Se per assurdo ci fosse un tale n, avrei $n \neq 0$
$\Rightarrow n-1 \in \mathbb{N}$. Ma $n-1 < 0$ (dato che $n < 1$)
e ciò contrasta con il fatto che $n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

- Se $k \in A \Rightarrow k+1 \in A$.

Infatti se ci fosse n con $k+1 < n < k+2$

$\Rightarrow n \neq 0 \Rightarrow n-1 \in \mathbb{N}$ e quindi

$$k < n-1 < k+1$$

questo contraddice $k \in A$.

(Ho fatto vedere che $k+1 \notin A \Rightarrow k \notin A$)

DUNQUE $A = \mathbb{N}$ e cioè vale la tesi.

(5) Se $A \subset \mathbb{N}$ $A \neq \emptyset \Rightarrow$ esiste $\min A$.

Dim. $A \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, A è inferiormente limitato dato che gli el. di A sono ≥ 0
POSSO CONSIDERARE

$m := \inf A \qquad (m \in \mathbb{R} \, , \, m \geq 0)$

DICO CHE $m \in A$!! (se ciò è vero $\Rightarrow m = \min A$)

SE PER ASSURDO $m \notin A$, ne seguirebbe

(a) $\qquad m < a \quad \forall a \in A$

(b) $\qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, a' \in A$ con $a' < m + \varepsilon$

Uso la (b) con $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ TROVO $a_1 \in A$ con $m < a_1 < m + 1$.

Uso la (b) con $m + \varepsilon = a_1$ (cioè $\varepsilon = a_1 - m > 0$)

$\Rightarrow$ trovo $a_2 \in A$ con $m < a_2 < m + \varepsilon = a_1$

MA $0 < a_1 - a_2 < 1 \Rightarrow$ ho trovato un intero $n = a_1 - a_2$ in $]0, 1[$ ASSURDO.

OGNI SOTTOINSIEME $A \neq \emptyset$ DI $\mathbb{N}$ HA MINIMO

(è equivalente al principio di induzione ...)

(6) Se $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, $\sup A < +\infty \Rightarrow \exists \max A$

(se $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, A limitato superiormente $\Rightarrow A$ ha max.)

(Dim. simile a quella di 5 ...)

(7) $\sup \mathbb{N} = +\infty$ ($\mathbb{N}$ non è limitato superiorm.)

Anzi, <u>Dato $a \in \mathbb{R}$ $a > 0$</u> $\Rightarrow$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} na = +\infty \quad \left(\sup \{ na : n \in \mathbb{N} \} = \sup \{ a, 2a, 3a, \dots \} \right)$$

<u>Dim.</u> Se $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} na < +\infty \Rightarrow \exists M$ tale che $na \leq M$ $\forall n$

$$\Rightarrow n \leq \frac{M}{a} \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} n < +\infty$$

$\Rightarrow$ (per la 6) $\exists \max \mathbb{N} = n_0$

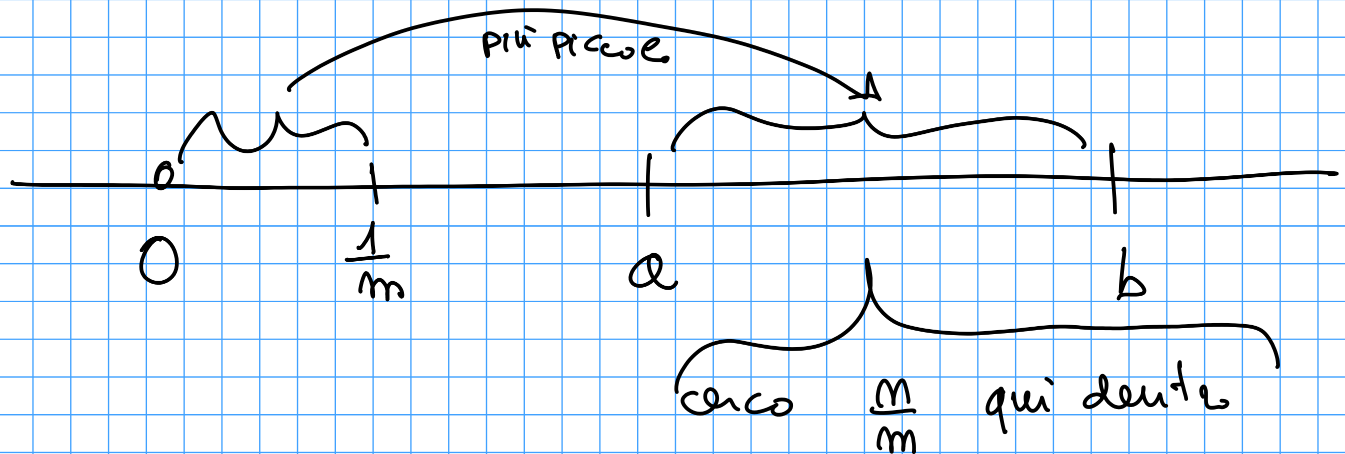
Ma $n_0 + 1 > n$ ASSURDO

CONSEGUENZA INTERESSANTE: I numeri razionali "sono densi" in $\mathbb{R}$ / Posso "approssimare" i reali con i razionali.

PRECISAMENTE: $\left\{ \frac{m}{n} \dots \right\}$

$\circledast$ Se $a < b$ sono numeri reali $\Rightarrow$ esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $a < q < b$

CONSIDERIAMO (per semplicità) $0 \leq a < b$

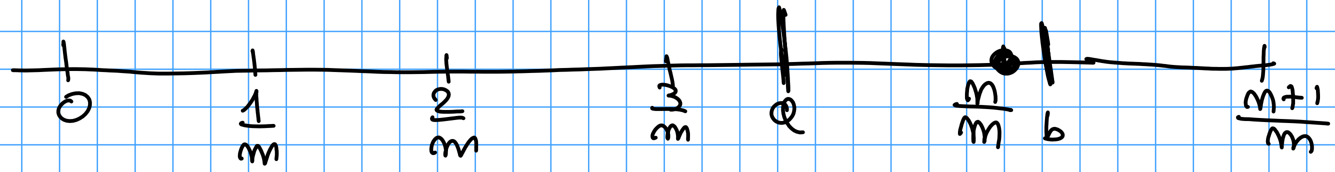


(1) trovo $n > \frac{1}{b-a} \iff \frac{1}{n} < b-a$

(2) prendo $m = \max \left\{ m' : \frac{m'}{n} < b \right\} =$

$\max \{ m' : m' < nb \}$ (lim. sup.)

(questo max esiste per i discorsi fatti sopra!)



$\Rightarrow \quad \frac{n}{m} < b$. DICO CHE $\frac{n}{m} > a$. SE NON FOSSE $> a$

$\frac{n}{m} \le a$. AGGIUNGO $\frac{1}{m}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{n+1}{m} \le a + \frac{1}{m} < b}$

(perché $a + \frac{1}{m} < a + b - a = b$)

MA ALLORA $\frac{n+1}{m} < b$ CONTRO IL FATTO CHE

$n = \max \left\{ n' \text{ t.c. } \frac{n'}{m} < b \right\}$.

IN DEFINITIVA $\boxed{a < \frac{n}{m} < b}$

Dunque ogni numero reale può essere "approssimato arbitrariamente" con un razionale

---

ESEMPI DI UTILIZZO DEL PRINCIPIO DI INDUZIONE.

RICORDIAMO IL SIMBOLO DI SOMMATORIA

"$\sum$"

SE $a_1, a_2, \dots, a_n$ SONO NUMERI REALI

(che posso pensare come una funzione $a : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$

$a_1 = a(1)$ $\quad a_2 = a(2)$ $\quad \dots \quad a_n = a(n)$;

Dato i intero tra 1 ed n è definito a_i $(= a(i))$)

SCRIVO $\sum_{i=1}^{n} a_i$ per indicare $a_1 + a_2 + \dots + a_n$

= somma di tutti gli a_i quando i varia tra 1 e n

PER ESEMPIO $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = \overset{i=0}{\overset{\downarrow}{1}} + \overset{i=1}{\overset{\downarrow}{3}} + \overset{i=2}{\overset{\downarrow}{5}} + \dots + 2n+1$$

SEMBRA CHE $\boxed{\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2}$

VEDIAMO ALCUNI CASI DI QUESTA FORMULA

$n = 0$ $\qquad \sum_{i=0}^{0} (2i+1) = (0+1)^2 = 1$

c'è solo $i=0$ $\Rightarrow$ la somma diventa $2 \cdot 0 + 1 = 1$

VIENE $1 = 1$ VERA

$n = 1$ $\qquad \sum_{i=0}^{1} (2i+1) = (1+1)^2 = 2^2 = 4$

ci sono gli indici $\left.\begin{array}{l} i=0 \rightarrow 2i+1 = 1 \\ i=1 \rightarrow 2i+1 = 3 \end{array}\right\} 1+3 = 4$

VIENE $4 = 4$ VERA

$n = 2$ $\qquad \sum_{i=0}^{2} (2i+1) = (2+1)^2 = 3^2 = 9$

$$\underset{i=0}{1} + \underset{i=1}{3} + \underset{i=2}{5} = 9$$

VERA

COME DIMOSTRO CHE LA FORMULA È VERA $\forall n$?
USO L'INDUZIONE:

PASSO $n=0$ LA FORMULA È VERA (VEDI SOPRA)

"PASSO INDUTTIVO" Supponiamo che la formula sia vera per n, cioè che

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$$

AGGIUNGO A ENTRAMBI I LATI $2(n+1)+1$, TROVO

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) + 2(n+1)+1 = (n+1)^2 + 2(n+1) + 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) + 2(n+1)+1 = \sum_{i=0}^{n+1} (2i+1)$$

$$(n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = ((n+1)+1)^2 = (n+2)^2$$

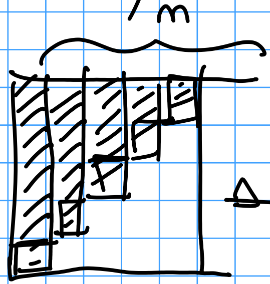
DUNQUE $\sum_{i=0}^{n+1} (2i+1) = (n+2)^2$ che è il caso $n+1$.

IN DEFINITIVA (INDUZIONE) LA FORMULA VALE $\forall n$

$$\sum_{i=0}^{n} i \quad \left(= \sum_{i=1}^{n} i \right) \quad = \quad \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\parallel$$

$$n+(n-1)+\dots+1 \qquad n$$



$$\triangle \quad \frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n^2-n+2n}{2}$$

ALTRO MODO :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & + 2 & + \dots & & + & n \\ n & +(n-1) & + \dots & & + & 1 \\ \downarrow & \downarrow & & & & \downarrow \\ n+1 & n+1 & & & & n+2 \end{array} \quad = n(n+1)$$

PER DIM. $\forall n$ USO L' INDUZIONE

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\underline{n=0}$ $\quad \displaystyle\sum_{i=0}^{0} i = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0$ $\quad$ VERA

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0$$

$\underline{\text{“}n \Rightarrow n+1\text{”}}$ $\quad$ Se vale $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

AGGIUNGO $n+1$ A ENTRAMBI I LATI $\Rightarrow$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = (n+1)\left[\frac{n}{2}+1\right]$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

VERO IL CASO $n+1$

$\Rightarrow$ LA FORMULA VALE $\forall n$.

DEFINIZIONI RICORSIVE

per esempio potrei definire $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

dicendo $\circledast$ $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = 2f(n) \end{cases}$

se volessi $f(4)$, applicando la definizione:

$$f(4) = 2\cdot f(3) = 2\cdot 2 f(2) = 2\cdot 2\cdot 2 f(1) =$$

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot f(0) = 2^4$$

IN GENERALE $f(n) = 2^n$ (LO VERIFICO PER IND.)

COME CONSEGUENZA DEL PRINCIPIO DI INDUZIONE SI HA CHE UNA DEFINIZIONE DEL TIPO ⊗ <u>È BEN POSTA</u>. Per es.

$$\begin{cases} f(0) = 5 \\ f(n+1) = \dfrac{f(n)^2 + n^2}{f(n)+1} \end{cases}$$

questo definisce una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (ANCHE SE NON RIESCO A "ESPLICITALA")

DATO $n \in \mathbb{N}$ posso calcolare tale $f(n)$ (in n PASSI)

DEF $n!$ è definito da

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1)\, n! \end{cases}$$

chiaramente $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

FATTI $n!$ corrisponde al numero di <u>permutazioni</u> di un insieme di n

elementi, cioè dell'insieme:

$$\{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}, \ \sigma \text{ bigettivo}\}$$

$n! =$ in quanti modi posso "disporre" n oggetti in n posti

$=$ numero di parole di lunghezza n che posso formare con n lettere, se ogni lettera compare solo 1 volta

SE VOLESSI GENERALIZZARE:

quanti modi posso "disporre" n oggetti in k posti $(n \geq k)$?

VIENE $\underbrace{n \cdot (n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ fattori}} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

DISPOSIZIONI DI n OGG. IN k POSTI

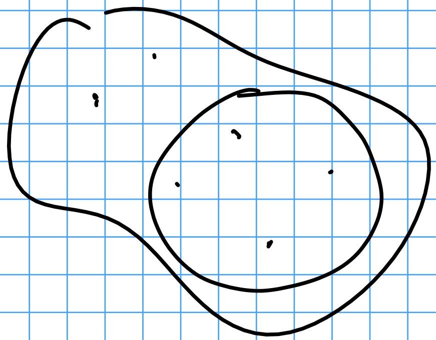
$\times$ SONO $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

$$\{\sigma : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}, \ \sigma \text{ iniettivo}\}$$

(data σ come sopra , $\sigma(k)$ = l'oggetto che va al posto k)

SE NON VOGLIO CONSIDERARE L'ORDINE $\Leftrightarrow$
MI INTERESSA SAPERE

QUANTI SONO $B \subset \{1 \dots n\}$ tali che B ha k elementi



TROVO $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

DIVIDO LE DISPOSIZIONI
PER IL NUMERO DI PERMUTAZIONI
DI k elementi

$\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ si chiama coeff. binomiale, si indica con $\binom{n}{k}$

e indica il numero di "combinazioni" di n oggetti su k posti

(comb. = disp. senza ordine)