# Analisi Matematica I

## prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 4, 6 ottobre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

FATTO: Dato $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A limitato superiormente

$\Rightarrow \exists$ $\boxed{\sup A}$ definito come $\min\{$ maggioranti di A $\}$

($M \in \mathbb{R}$ maggiorante se $M \geq a$ $\forall a \in A$
A limitato superiormente se esiste almeno un maggiorante)

---

Dato $A \neq \emptyset$ e lim. sup. posso dire che un numero $\lambda$ è l'estremo superiore di A se $\lambda \in \mathbb{R}$ verifica:

→ (a) $\lambda \geq a$ $\forall a \in A$ ($\lambda$ è un maggiorante)

(b) se $\lambda' < \lambda$ $\exists$ $a' \in A$ tale che $a' > \lambda'$

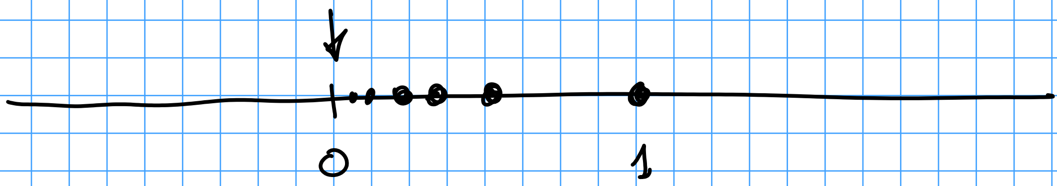
($\lambda$ è il minimo dei magg.)

La (b) si può anche scrivere

→ (b) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $a' \in A$ tale che $a' > \lambda - \varepsilon$

La a) dice che $\lambda$ è un maggiorante. La b) dice che se rimpicciolisco $\lambda$ di una quantità positiva, quello che trovo NON è più un maggiorante

**ESEMPIO** $A = \left\{ \frac{1}{n} , n \in \mathbb{N} , n > 0 \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$





$\underline{\sup A = 1 = \max A}$. Infatti $1 \geq \frac{1}{n} \quad \forall n$ e quindi 1 è un maggiorante per A.

Peraltro $1 \in A$ dato che $1 = \frac{1}{1 \leftarrow n}$. Dunque $1 = \max A$

CHI è $\inf A$. $\Big\{$ Analogamente alla caratterizzazione del sup. si ha: ( dato $A \subset \mathbb{R}$ )

$$\boxed{\lambda = \inf A \iff \begin{array}{l} \to (a) \quad \lambda \leq a \quad \forall a \in A \\ \to (b) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a' \in A \text{ con } a' < \lambda + \varepsilon \end{array}} \Big\}$$

Torniamo ad $A = \left\{ \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$.

DICO CHE $\inf A = 0$. Per vederlo notiamo che

(a) $0 \leq a \quad \forall a \in A$ ; in effetti $0 < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$

(b) Dato $\varepsilon > 0$ trovo sicuramente $n' \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n'} < \varepsilon$ (basta prendere $n' > \frac{1}{\varepsilon}$). Ho quindi mostrato che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a' \in A \quad \left(a' = \frac{1}{n'}\right)$ tale che $a' < 0 + \varepsilon$

HO VERIFICATO LE DUE PROPRIETÀ DELL' ESTREMO INFERIORE

<u>NOTA</u> $0 \notin A$ DUNQUE $A$ NON HA MINIMO

<u>ESEMPIO</u> $A = \{ 0,\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots :$ ci sono infinite cifre eguali a $7 \}$

chi è $\sup A$ ??

PREMESSA: CHI È $0,1357203 = \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{0}{10^6} + \frac{3}{10^7}$

Se considero un allineamento con infinite cifre devo dire

$0,\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \dots := \sup \{ 0,\alpha_1 \dots \alpha_n \mid$ al variare di $n \}$

TUTTI I NUMERI QUI DENTRO SONO $< 1$

<u>DICO</u> che $\sup A = 1$. Devo verificare la a) e la b) scritte sopra

(a) $1 \geq a \quad \forall a \in A$ CHIARO $(0{,}a_1 \ldots \leq 1)$

(b) $\forall \varepsilon > 0$ esiste un numero $a \in A$ con $a > 1-\varepsilon$

Prendo $a = 0{,}\underset{\substack{\uparrow \\ k}}{9 - - - 9}\,7\,7 \ldots = 0{,}9 \ldots 9\overline{7}$

Tale $a$ è $> 0{,}\underbrace{9 \ldots 9}_{k \text{ volte}}$

Per trovare un $a$ con $a > 1-\varepsilon$ basta scegliere $k$ in modo che

$0{,}\underbrace{9 \ldots 9}_{k} > 1-\varepsilon$

perché porta dalla potenza 1

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \ldots + \frac{9}{10^k} = 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{10^k}\right) = 9\left(\frac{1}{10}\,\frac{\frac{1}{10^k} - 1}{\frac{1}{10} - 1}\right) =$$

FORMULA IMPORTANTE: Dato $A \in \mathbb{R}$ e $k$ intero

$$A^0 + A^1 + A^2 + \ldots + A^k = \frac{A^{k+1} - 1}{A - 1}$$

$$(A^0 + A^1 + \ldots + A^k)\frac{(A-1)}{(A-1)} = \frac{(\cancel{A^1} + \cancel{A^2} + \ldots + A^{k+1}) - (A^0 + \cancel{A^1} + \cancel{\ldots} + A^k)}{(A-1)} = \frac{A^{k+1} - A^0}{A-1}$$

$A$ si dice "la ragione" della progressione geometrica $A^0, A^1, A^2, \dots$

Se parto da 1: $A + A^2 + \dots + A^k = \dfrac{A^{k+1}-1}{A-1} - 1 = \dfrac{A^{k+1}-1-A+1}{A-1} = \dfrac{A^{k+1}-A}{A-1} = A\,\dfrac{A^k-1}{A-1}$

$A(A^0 + \dots + A^{k-1})$

$$\frac{9}{10}\,\frac{\frac{10^k-1}{10^k}}{\frac{9}{10}} = 1 - \frac{1}{10^k} \qquad \left( 0,\underbrace{9\dots9}_{k} = 1 - \frac{1}{10^k} \right)$$

DUNQUE BASTA SCEGLIERE $k$ in modo che $\dfrac{1}{10^k} < \varepsilon$

$\iff 10^k > \dfrac{1}{\varepsilon}$ VERO PER $K$ abbastanza grande #

---

Analogamente a quanto visto prima:

$\sup A = +\infty \iff \forall m \in \mathbb{R}\ \exists\, a' \in A$ tale che $a' > m$

$\inf A = -\infty \iff \forall m \in \mathbb{R}\ \exists\, a'\ A$ tale che $a' < m$

PROPRIETÀ $\quad A \neq \emptyset$

(a) $\exists \max A \iff \sup A \in A$ (in particolare $\sup A \in \mathbb{R}$)

(b) $\exists \min A \iff \inf A \in A$ (in particolare $\inf A \in \mathbb{R}$)

(c) $\inf A \leq \sup A$ $(A \neq \emptyset)$

( $\inf A = \sup A$ solo nel caso $A = \{a\}$, A contiene solo un elemento )

(d) $\alpha \in \mathbb{R}$ e considero $B = \{\alpha a : a \in A\}$

$\underline{\alpha > 0}$ $\sup B = \alpha \sup A$ / $\inf B = \alpha \inf A$

$\underline{\alpha < 0}$ $\sup B = \alpha \inf A$ / $\inf B = \alpha \sup A$

per es. $A = [1, 3]$

se $\alpha = 2$ $B = [2, 6]$

se $\alpha = -2$ $B = [-6, -2]$

vero anche con gli infiniti se CONVENIAMO $\alpha \cdot +\infty = +\infty$ / $\alpha \cdot (-\infty) = -\infty$ quando $\alpha > 0$. $\alpha \cdot +\infty = -\infty$ / $\alpha \cdot (-\infty) = +\infty$ quando $\alpha < 0$

(e) Se A e B sono due insiemi e definiamo

$C = \{ a + b$ tali che $a \in A$ $b \in B \}$

Allora

$$\sup C = \sup A + \sup B$$
$$\inf C = \inf A + \inf B$$

ESEMPIO $A = [1,3]$, $B = [2,4] \Rightarrow C = [3,7]$ !!

La proprietà vale anche nei casi infiniti se CONVENIAMO

$x + \infty = +\infty$ se $x \in \mathbb{R}$ o $x = +\infty$

$x + (-\infty) = -\infty$ se $x \in \mathbb{R}$ o $x = -\infty$

(NON DEFINISCO $+\infty + (-\infty)$ e nel caso sopra NON PUÒ VENIRE $+\infty - \infty$

Queste proprietà si possono ricavare dalla def. (NON LO FACCIAMO)

---

inf e sup di FUNZIONI A VALORI REALI

DEF. Se $A$ è un insieme e $f : A \to \mathbb{R}$ definisco l'estremo superiore (inferiore) di $f$ su $A$

$$\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x) := \sup f(A) = \sup\{ f(x) : x \in A\}$$
$$= \sup\{ y : \exists\, x \in A \text{ con } f(x) = y \}$$

$$\inf_A f = \inf_{x \in A} f(x) := \inf f(A)$$

<u>CARATTERIZZAZIONE</u> $\lambda \in \mathbb{R}$. $f : A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$\lambda = \sup_A f \iff$ (a) $f(x) \leq \lambda \quad \forall x \in A$

(b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, x' \in A : \ f(x') > \lambda - \varepsilon$

$\lambda = \inf_A f \iff$ (a) $f(x) \geq \lambda \quad \forall x \in A$

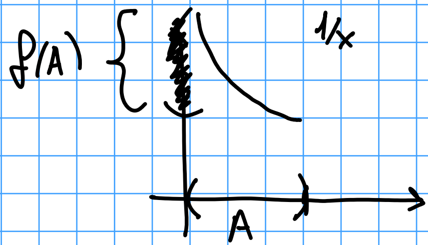
(b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, x' \in A : \ f(x') < \lambda + \varepsilon$

$\sup_A f = +\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}$ esiste $x' \in A : f(x') > M$

$\inf_A f = -\infty \iff \forall\, m \in \mathbb{R}$ esiste $x' \in A : f(x') < m$

<u>ESEMPIO</u> $A = ]0, 1[$ ; $f(x) = \frac{1}{x}$

$( f(A) = ]1, +\infty[ )$



$\Rightarrow \quad \inf_A f = 1 \quad ; \quad \sup_A f = +\infty$ MENTRE

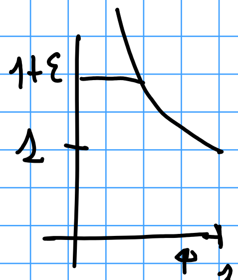
$\inf A = 0 \quad ; \quad \sup A = 1$

Posso dim. queste relazioni usando le caratt. di prima

$\sup_{0<x<1} \frac{1}{x} = +\infty \iff \forall m \in \mathbb{R} \ \exists x : \frac{1}{x} > m$ (basta prendere $0 < x < \frac{1}{m}$ se $m > 0$)

$\inf_{0<x<1} \frac{1}{x} = 1 \iff$ (a) $\forall x \in ]0,1[ \ , \ \frac{1}{x} \geq 1$ (VERA!)

(b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x' \in ]0,1[$ con $\frac{1}{x'} < 1+\varepsilon$




(prendo $\frac{1}{x} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \iff x = \frac{1}{1+\varepsilon/2} \in ]0,1[$

PROP. (a) $\inf_A f \leq \sup_A f$

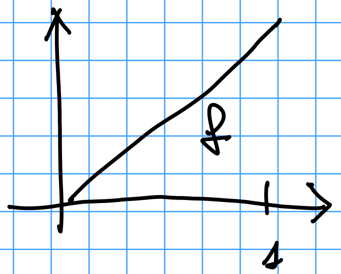
(b) Se $\alpha > 0$ $\inf_A \alpha f = \alpha \inf_A f \ / \ \sup_A \alpha f = \alpha \sup_A f$

Se $\alpha < 0$ $\quad \inf_A \alpha f = \alpha \sup_A f \quad / \quad \sup_A \alpha f = \alpha \inf_A f$

(c) $\quad f, g : A \to \mathbb{R}$

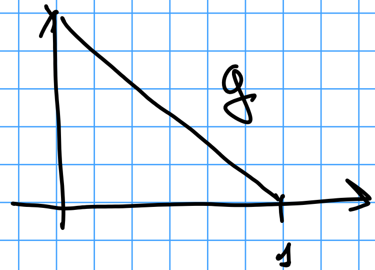
$$\inf_A f + \inf_A g \le \inf_A (f+g) \le \sup_A (f+g) \le \sup_A f + \sup_A g$$

NON È DETTO CHE VALGA "="




$f(x) = x$

$A = [0,1]$

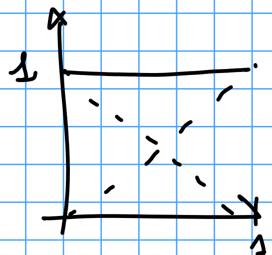



$g(x) = 1 - x$

$$\max_{[0,1]} f = 1 \qquad \max_{[0,1]} g = 1$$

$$\min_{[0,1]} f = 0 \qquad \min_{[0,1]} g = 0$$

$f(x) + g(x) = 1 \quad \forall x$




$$\Rightarrow \max_{[0,1]} (f+g) = \min_{[0,1]} (f+g) = 1$$

RISPETTO ALLA PROPRIETÀ PER GLI INSIEMI, QUELLO CHE NON FUNZIONA È

$$(f+g)(A) \neq f(A)+g(A) = \{\text{tutte le somme } f(x)+g(y) \text{ quando } x,y \in A\}$$

---

ESEMPIO (somma della progressione geometrica)

Sia. $0 \leq A < 1$ Dato $n$ abbiamo visto che

$$1 + A + A^2 + \dots + A^n = \frac{A^{n+1} - 1}{A - 1} = \frac{1 - A^{n+1}}{1 - A}$$

Se prendo $\sup\{1 + \dots + A^n : n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{1-A}$

INFATTI (a) $\frac{1 - A^{n+1}}{1 - A} \leq \frac{1}{1-A}$ $\forall n$ ; inoltre

(b) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n'$ tale che $\frac{1 - A^{n+1}}{1 - A} > \frac{1}{1-A} - \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-A} - \frac{A^{n+1}}{1-A} > \frac{1}{1-A} - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{1-A} \cdot A^{n+1} \Leftrightarrow$$

$(1-A)\varepsilon > A^{n+1}$ VERA se $n$ abbastanza grande (DATO che $A < 1$)

(se passo ai logaritmi $\ln((1-A)\varepsilon) > \ln(A) \cdot (n+1)$)

$\Longleftrightarrow \quad n+1 > \dfrac{\ln((1-A)\cdot\varepsilon)}{\ln(A)}$ $\quad (\ln(A) < 0 \;!!)$

Introduciamo il simbolo $\sum_{n=1}^{n_0} a_n$ l' n

$$\boxed{1 + A + A^2 + \ldots A^n = \sum_{k=0}^{n} A^k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\text{qualcosa che dipende da } k}_{f(k)} = f(0) + f(1) + \ldots + f(n)$$

$\Rightarrow$ somma di tutte le $f(k)$ quando $k$ varia tra $0$ e $n$

( potrei anche scrivere $\sum_{k=k_0}^{k_1} f(k) = f(k_0) + \ldots + f(k_1)$ )

o anche $\sum_{\substack{k=k_0 \\ k \text{ dispari}}}^{k_1} =$

<u>**DEF.**</u> $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ indica $\sup\left\{ \sum_{k=0}^{n} A^k \,,\; n \in \mathbb{N} \right\}$ Def. PROVVISORIA

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \frac{1}{1-A} \quad \text{se} \quad 0 \le A < 1}$$

Possiamo allora discutere un momento il significato di

$$x = 0,\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots \qquad \text{dove } \alpha_1 \, \alpha_n \dots \in \{0, \dots 9\}$$

**Def.** Se $\alpha_1 \dots \alpha_n$ sono (infinite) cifre tra 0 e 9

posso considerare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{10^n} := \sup \Big\{ \underbrace{\sum_{n=0}^{k} \frac{\alpha_n}{10^n}}_{\frac{\alpha_1}{10} + \dots + \frac{\alpha_k}{10^k}} \quad k \in \mathbb{Z} \Big\}$

Esiste di sicuro per l'esistenza del sup.

PROBLEMA INVERSO Dato $x$ in $]0,1[$ posso trovare $\alpha_1 \dots \alpha_n \dots$

tali che $\displaystyle x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{10^n}$

La risposta è sì: Dato $x \in ]0,1[$ trovo $\alpha_1$ t.c.

$\alpha_1$ INTERO
$0 \le \alpha_1 \le 9$

$$\underbrace{\frac{\alpha_1}{10} \le x < \frac{\alpha_1 + 1}{10}}_{} \iff \alpha_1 \le 10x < \alpha_1 + 1$$

$$\to \quad 0 \le x - \frac{\alpha_1}{10} < \frac{1}{10}$$

TROVATA $\alpha_1$, TROVO $\alpha_2$ in modo che $\alpha_2$ INTERO, $0 \le \alpha \le 9$

$$\alpha_2 \le 100\left(x - \frac{\alpha_1}{10}\right) < \alpha_2 + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \le x - \frac{\alpha_1}{10} - \frac{\alpha_2}{100} < \frac{1}{100}$$

ITERANDO TROVO $\alpha_k$ INTERO, $0 \le \alpha_k < 9$ IN MODO CHE

$$\boxed{\frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \dots + \frac{\alpha_k}{10^k} \le x < \frac{\alpha_1}{10} + \dots + \frac{\alpha_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}} \qquad (\ast)$$

QUESTO PROCEDIMENTO POTREBBE FERMARSI SE TROVO "=" NELLA DIS. DI SINISTRA (DA LÌ IN POI $\alpha_k = 0$ ...)

IN GENERALE PERÒ TROVO INFINITE CIFRE $\alpha_k$ PER CUI VALE $(\ast)$

NE SEGUE CHE $\sup\left\{\frac{\alpha_1}{10} + \dots + \frac{\alpha_k}{10^k},\ k \in \mathbb{N}\right\} = x$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{10^n} = x$$

(dove $\alpha_1 \dots$ sono ottenute a partire da $x$ come detto sopra)

OSS. è vero anche che

$$X = \inf \left\{ \sum_{m=1}^{k} \frac{\alpha_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \quad k \in \mathbb{N} \right\}$$

PICCOLO FASTIDIO $\quad 0,\overline{9} = 1$

perché si parte da $\left(\frac{1}{10}\right)^1$

$$0,\overline{9} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{9}{10^m} = 9 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{10^m} = 9 \left(\frac{1}{10}\right) \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

ANALOGAMENTE $\quad$ a antiperiodo $\overline{9} = 0,(\text{antiperiodo}+1)$

per es $\quad 0,1346\overline{9} = 0,1347$

Se decido di prendere solo allineamenti SENZA "CODE" INFINITE DI 9 si vede che tali allineamenti descrivono in maniera UNIVOCA i numeri reali.

ESEMPIO $\quad 0,\overline{5} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{5}{10^m} = 5 \sum \frac{1}{10^m} = 5 \frac{1}{10} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{5}{9}$

PARENTESI SUI NUMERI INTERI (PRINCIPIO DI INDUZIONE)

VELOCE COSTRUZIONE DI $\underline{\underline{\mathbb{N}}}$ ??

L'IDEA : (I) $\begin{cases} \mathbb{N} \text{ CONTIENE } 0 \\ \text{se } \mathbb{N} \text{ contiene } n \Rightarrow \mathbb{N} \text{ contiene } n+1 \end{cases}$

$\boxed{\mathbb{N} \text{ è il "più piccolo"}}$ sottoinsieme di $\mathbb{R}$ per cui vale (I)

Se $A \subset \mathbb{R}$, $A$ verifica I $\Rightarrow$ $\mathbb{N} \subset A$

La proprietà di essere il "più piccolo" degli $A \subset \mathbb{R}$ che verificano (I) si traduce :

<u>PRINCIPIO DI INDUZIONE</u> 1 Se $A \subset \mathbb{N}$ tale che

$$\begin{cases} 0 \in A \\ n \in A \Rightarrow n+1 \in A \end{cases}$$

allora $A = \mathbb{N}$

IN MODO EQUIVALENTE

## PRINCIPIO DI INDUZIONE 2

Se $P(n)$ è una proprietà definita per $n \in \mathbb{N}$. Se valgono

$$\begin{cases} P(0) \text{ vera} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \text{ vera} \end{cases}$$

Allora $\forall n \; P(n)$ vera

ESEMPIO DI UTILIZZO DEL PRINC. DI IND.

Dato $a > -1$ e dato $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Vediamo alcuni casi.

$n = 0$ $\quad (1+a)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot a \quad (\Rightarrow 1 \geq 1)$ VERA

$n = 1$ $\quad (1+a)^1 = 1 + 1 \cdot a = 1 + a \quad$ ( se vale "=" $\Downarrow$ vale "$\geq$" ) VERA

$n = 2$ $\quad (1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 \geq 1 + 2a$ VERA

$n=3 \qquad (1+a)^3 = 1+3a+\underbrace{3a^2+a^3}_{a^2(3+a) \geq 0} > 1+3a$ VERA

⋮

LE COSE SI COMPLICANO!!

PROVIAMO A DIMOSTRARLO PER INDUZIONE.

$$P(n) = \text{"} (1+a)^n \geq 1+na \text{"}$$

$P(0)$ : $(1+a)^0 \geq 1+0 \cdot a$ VERA

"PASSO INDUTTIVO" $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ cioè posso dim.

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

ammettendo $(1+a)^n \geq 1+n \cdot a$ COME FACCIO?

SCRIVO QUELLO CHE "AMMETTO DI SAPERE"

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

MOLTIPLICO PER $1+a$ ( $>0$ : per ipotesi $a>-1$ )

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$$

$$\Updownarrow$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+a+na+na^2$$

Dato che $na^2 \geq 0$ ne deduco (prop. transitiva di $\geq$)

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+a+na \leftarrow 1+(n+1)a$$

DUNQUE $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ e quindi

$P(n)$ è vero $\forall n$ !

---

oss.

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \frac{1}{1-A} \qquad \sum_{n=k}^{\infty} A^n = A^k \frac{1}{1-A}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A^n = A \frac{1}{1-A}$$