Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 3, 5 ottobre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

I numeri reali

I numeri reali sono un insieme, che indicheremo con $\mathbb{R}$, in cui sono definite:

- due **operazioni**, dette somma e prodotto. Formalmente:

$$s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

  (s è la somma e p il prodotto) che indichiamo nel modo più standard:

$$x + y \text{ in luogo di } s(x,y) \qquad x \cdot \cancel{y \text{ (o } x}y \text{) in luogo di } p(x,y)$$

  che hanno le proprietà elencate nel seguito;
- una **relazione d'ordine**, formalmente:

$$O : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{\text{VERO}, \text{FALSO}\},$$

  per cui usiamo la notazione

$$x \geq y \text{ per indicare che } O(x,y) = \text{VERO}$$

  (*è vero che x è maggiore o eguale a y*) con le proprietà elencate dopo.

Inoltre $\mathbb{R}$ ha una proprietà di **completezza** (a differenza di $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ *non ha buchi*).

Assiomi dei numeri reali: operazioni

Proprietà della **somma** "+"

- $x+y=y+x$ (prop. commutativa)
- $(x+y)+z=x+(y+z)$ (prop. associativa)
- esiste 0 tale che $0+x=x$ (esistenza elemento neutro)
- esiste $-x$ tale che $-x+x=0$ (esistenza inverso: *l'opposto*)

Proprietà del **prodotto** "$\cdot$"

- $x\cdot y=y\cdot x$ (prop. commutativa)
- $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (prop. associativa)
- esiste 1 tale che $1\neq 0$ e $1\cdot x=x$ (esistenza elemento neutro)
- se $x\neq 0$ esiste $1/x$ tale che $1/x\cdot x=1$ (esistenza inverso: *il reciproco*)

Legame tra somma e prodotto

- $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ (prop. distributiva)

Assiomi dei numeri reali: relazione d'ordine

Proprietà dell'**ordine** "$\geq$"

- se $x, y \in \mathbb{R}$ una tra $x \geq y$ e $y \geq x$ è vera (ℝ totalmente ordinato)
- $x \geq x$ (prop. riflessiva)
- se $x \geq y$ e $y \geq x$, allora $x = y$ (prop. antisimmetrica)
- se $x \geq y$ e $y \geq z$, allora $x \geq z$ (prop. transitiva)

Legami tra ordine e operazioni

- se $x \geq y$, allora $x + z \geq y + z$
- se $x \geq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \geq y \cdot z$

ASSIOMA DI DEDEKIND (completezza)

Se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tali che $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B \qquad a \leq b$$

allora esiste c (**elemento separatore**) tale che

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B \qquad a \leq c \leq b$$

NUMERI REALI un insieme $\mathbb{R}$ in cui sono definite:

- OPERAZIONI di SOMMA e PRODOTTO $+$ e $\cdot$
- UNA RELAZIONE D'ORDINE "$\geq$"
- INOLTRE $\mathbb{R}$ è COMPLETO ("NON HA BUCHI")

OPERAZIONI Somma è una funzione

$$s(x, y) \quad \text{dove } x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Downarrow$$
$$x+y$$

tale che

(a) COMMUTATIVA: $x+y = y+x$

(b) ASSOCIATIVA: $(x+y)+z = x+(y+z)$

quindi posso scrivere $x+y+z$ (senza mettere parentesi)

(c) Esiste "l'elemento neutro", indicato con 0, tale che

$$0 + x = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(d) $\forall x \in \mathbb{R}$ esiste l'opposto $-x$ tale che

$$x + (-x) = 0$$

STESSE PROPRIETÀ PER IL PRODOTTO

$$p(x,y) = x \cdot y$$

(a) COMM. $x \cdot y = y \cdot x$

(b) ASS $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(c) $\exists$ l'elemento neutro, indicato con 1, t.c.

$$1 \cdot x = x \quad \forall x \qquad 1 \neq 0$$

(d) $\forall x \neq 0$ esiste il reciproco $1/x$ tale che

$$\frac{1}{x} \cdot x = 1$$

INOLTRE TRA $+$ e $\cdot$

PROP. DISTRIBUTIVA: $(x+y)z = x \cdot z + y \cdot z$

DAGLI ASSIOMI SCRITTI SOPRA SI RICAVANO LE PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI

(a) L'elemento neutro è unico (sia 0 che 1)

Dim. nel caso di 0. Per assurdo supponiamo che ci sia $0'$ tale che $0' + \underset{p}{x} = \underset{p}{x} \quad \forall x$

Ma allora posso prendere $x = 0$ $\Rightarrow$

$$0' + 0 = 0$$

Ma per lo stesso motivo ($0 + x = x$, prendo $x = 0'$)

$$0 + 0' = 0'$$

$\Rightarrow$ $0 = 0'$ ASSURDO

(b) Dato x c'è un solo $-x$. Per assurdo supponiamo che ci sia $(-x)'$. Allora

$x + (-x) = 0$ $\to$ SOMMO A ENTRAMBI I LATI $(-x)'$

$$\underbrace{(-x)' + x}_{0} + (-x) = \underbrace{(-x)' + 0}_{(-x)'}$$

$$\underbrace{0 + (-x)}_{-x}$$

$\Rightarrow$ $-x = (-x)'$

(c) $x \cdot 0 = 0$ $\forall x$??

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$$

SOMMO $-(x \cdot 0)$ a entrambi i lati $\Rightarrow$

$$0 = x \cdot 0$$

(d) Legge di annullamento del prodotto

$x \cdot y = 0 \iff$ uno tra x e y è uguale a 0

O EQUIVALENTEMENTE

$x \neq 0$ e $y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \neq 0$

SE PER ASSURDO $x \neq 0$, $y \neq 0$ MA $xy = 0$

MOLTIPLICO PER $\frac{1}{x}$ e trovo $\frac{1}{x} \cdot x \cdot y = \frac{1}{x} \cdot 0 \iff$
$(x \neq 0)$

$y = 0$ (TROVO UN ASSURDO)

ALTRE PROP. (CHI VUOLE PUÒ PROVARE A DIM.)

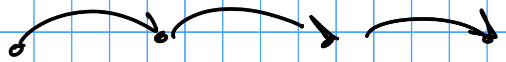
- $-(-x) = x$
- $(-1) \cdot x = -x \quad \forall x$
- $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$

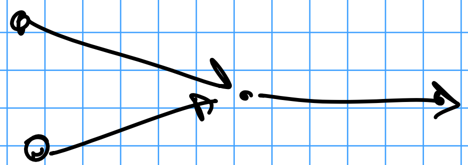
IN $\mathbb{R}$ C'È LA REL. "$\geq$" CIOÈ

(a) Dati x, y in $\mathbb{R}$ si può stabilire se

$\boxed{x \geq y}$ è VERA o FALSA

(c'è un ordine TOTALE)





NO

(b) $x \geq x$ è per ogni x (RIFLESSIVA)

(c) $(x \geq y)$ e $(y \geq x)$ $\iff$ $x = y$ (ANTISIMMETRICA)

(d) $(x \geq y)$ e $(y \geq z)$ $\Rightarrow$ $x \geq z$ (TRANSITIVA)

INOLTRE L'ORDINE "VA D'ACCORDO" CON LE OPERAZIONI:

(e) $x \geq y$, $z \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $x + z \geq y + z$

(f) $x \geq y$, $z \geq 0$ $\Rightarrow$ $x \cdot z \geq y \cdot z$

DEFINIZIONI

- $x > y$ SIGNIFICA $(x \geq y)$ e $(x \neq y)$
- $x < y$ significa che NON È $(x \geq y)$
- $x \leq y$ significa che $(x < y)$ o $(x = y)$

ALCUNE CONSEGUENZE:

- Se $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$. INFATTI DA

  $x \geq 0$ SOMMO $-x$ e TROVO

  $\underbrace{x + (-x)}_{0} \geq -x$ cioè $0 \geq -x$

- $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \cdot x \geq 0$, infatti

  Se $x \geq 0 \Rightarrow$ (moltiplico per $x \geq 0$) $\Rightarrow x \cdot x \geq 0$

  Se $x \leq 0 \Rightarrow (-x) \geq 0 \Rightarrow \underbrace{(-x)(-x)}_{= x \cdot x \;??} \geq 0$

$(-x)(-x) = (-1)x(-1)x$

$(-1)(-1)\, x \cdot x$

PER CASA!!

RIMANE DA VEDERE CHE $(-1)(-1) = -(-1) = 1$

- $x \geq y$ e $z \leq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

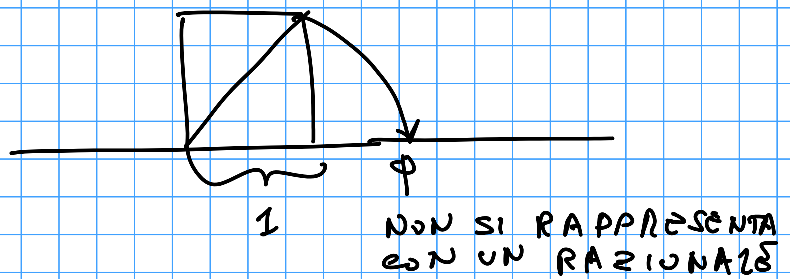
(PER CASA ...)

FINO A QUA I RAZIONALI VERICANO TUTTO

COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$.

ABBIAMO VISTO CHE NON C'È NESSUN NUMERO RAZION.

$q = \frac{m}{n}$ tale che $q^2 = 2$



$\Downarrow$

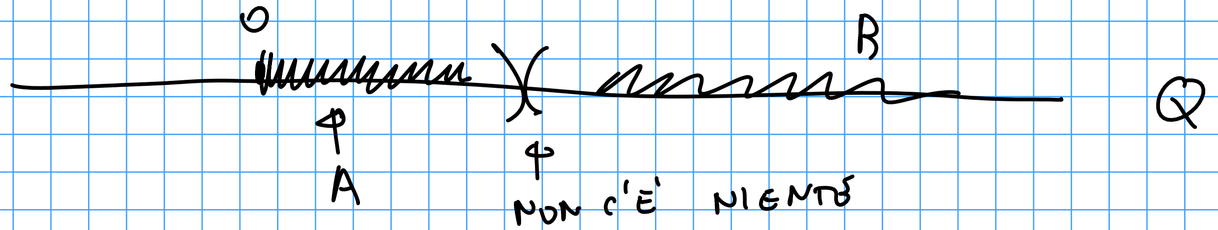
Se prendo $A = \{ x : x \geq 0 \ , x^2 \leq 2 \}$

$B = \{ x : x \geq 0 \ , x^2 \geq 2 \}$

SE L'AMBIENTE È $\mathbb{Q}$ NON C'È NESSUN ELEMENTO "SEPARATORE" TRA A e B

CIOÈ NON ESISTE $c \in \mathbb{Q}$ tale che

$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \ \forall b \in B$



IN $\mathbb{R}$ NON È COSÌ. VALE INFATTI:

ASSIOMA DI COMPLETEZZA (DI DEDEKIND)

Se A, B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tali che

- $A \neq \emptyset \qquad B \neq \emptyset$
- per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ si ha $a \leq b$

$\Rightarrow$ esiste c (elemento separatore) tale che

$$a \leq c \leq b \qquad \forall a \in A, \forall b \in B$$

USEREMO L'ASSIOMA DI COMLETEZZA TRAMITE LE NOZIONI DI

ESTREMO SUPERIORE / INFERIORE

Per introdurre l'estremo sup.: comincio dal max.

DEF. A INSIEME, $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

Se $\underbrace{\bar{a} \in A}$ tale che $\underbrace{\bar{a} \geq a}$ $\forall a \in A$

dico che $\bar{a}$ è il MASSIMO di A e scrivo

$$\bar{a} = \max A$$

(se $\underline{a} \in A$ e $\underline{a} \leq a$ $\forall a \in A \Rightarrow \underline{a} = \min A$)

È IMMEDIATO VEDERE CHE NON TUTTI GLI INSIEMI HANNO MASSIMO.

1) $A = \mathbb{R}$ non ha massimo, in effetti
se $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a+1 \in \mathbb{R}$ e $a+1 > a$

DUNQUE $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists b \in \mathbb{R}$ tale che $b > a$

IL DIFETTO È CHE A NON È LIMITATO SUPERIORM.

DEF. Dico che A è LIMITATO SUPERIORMENTE SE

esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $M \geq a$ $\forall a \in A$

Tale M si chiama "MAGGIORANTE" DI A.

NON COMUNQUE VERO CHE A limitato superiormente $\Rightarrow$ esiste il max A.

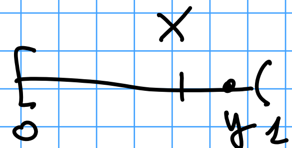
2) $A = [0, 1[= \{ x : 0 \le x < 1 \}$

$0 = \min A$ MA A non ha max

(nonostante A sia limitata superiormente)

Infatti $\forall x \in A \quad \exists y \in A$ con $y > x$

(dato $x < 1$ posso prendere $y = \frac{1+x}{2}$



e si ha $x < y < 1$)

IN QUESTO ESEMPIO, $A = [0, 1[$, 1 È IL MINIMO DEI MAGGIORANTI: I MAGGIORANTI DI $[0, 1[$ FORMANO $[1, +\infty[$

<u>TEOREMA</u> SE $A \neq \emptyset$, SE A è limitato superiormente

$\Rightarrow$ esiste (unico) il minimo dei maggioranti.

Questo numero si chiamerà <u>estremo superiore di A</u>

$$\boxed{\sup A}$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u> (conseguenza dell'assioma di completezza)

Definisco $B = \{ M : M$ maggiorante di $A \}$

- $B \neq \emptyset$ perché A è limitato superiormente
- Se prendo $a \in A$ e $b \in B \Rightarrow a \leq b$
  (per definizione di maggiorante!)

$\Rightarrow$ per l'assioma di completezza esiste c tale che

$$a \leq c \leq b \qquad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

LA DIS. $a \leq c \quad \forall a \in A$ dice che c è un maggiorante, cioè $c \in B$.

LA DIS. $c \leq b \quad \forall b \in B$ dice che $\underline{c = \min B}$

<u>ANALOGAMENTE</u>

- A si dice limitato inferiormente se esiste m tale che $m \leq a \quad \forall a \in A$
  Questo m si chiama MINORANTE per A
- <u>TEOREMA</u> Se $A \neq \emptyset$, A è limitato inferiormente esiste il $\max \{ \text{minoranti di } A \}$. Tale numero si chiama estremo inferiore di A: $\inf A$

NOTAZIONI

- Per dire che A **NON È LIMITATO SUPERIORMENTE** scrivo $\sup A = +\infty$

(cioè che $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists a \in A$ con $a > M$)

- Analogamente $\inf A = -\infty$ vuol dire che A NON È LIMITATO INFERIORMENTE:

$$\forall m \in \mathbb{R}\ \exists a \in A \text{ con } a < m$$

- Se $A = \emptyset$ si considera che $\sup A = -\infty$
$\inf A = +\infty$

CON QUESTE CONVENZIONI **HA SEMPRE SENSO** SCRIVERE $\sup A$ / $\inf A$

OSS. A ha max $\iff \sup A \in A$

A ha min $\iff \inf A \in A$

ESERCIZI

Sia $A := \{ x = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}, n > 1 \}$ cioè

$$A := \{ x : \exists\, n \in \mathbb{N}, n > 1, x = \frac{1}{n} \}.$$

Allora $\inf A =$ (esiste $\min A$?)

$\sup A =$ (esiste $\max A$?)

Sia $A = \{$ numeri x con $0 \leq x \leq 1$ con infiniti 7 nell'espansione decimale $\}$

$\inf A = ?$ $\max A$ (esiste ?)

$\sup A = ?$ $\min A$ (esiste ?)

<u>ESERCIZI</u> Trovare gli estremi superiore e inferiore (eventualmente ∞) dei seguenti insiemi

$$A := \{ y : \forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - x^2 \geq y \}$$

$$B := \{ y : \exists x \in \mathbb{R} \quad 1 - x^2 \geq y \}$$

(come sono fatti questi insiemi?)

$$C := \{ y : \forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - x^2 \leq y \}$$

$$D := \{ y : \exists x \in \mathbb{R} \quad 1 - x^2 \leq y \}$$