Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 2, 29 settembre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

FUNZIONI

$f: A \to B$ significa che

f è una funzione definita sull'insieme A (DOMINIO)

e valori in B (CODOMINIO)

ATTENZIONE: ANCHE A e B "fanno parte" della funzione

- Spesso si dà solo la "regola", per es $f(x) = \frac{1}{x}$

sottintendendo che $A = \{$insieme in cui la scrittura che definisce $f(x)$ HA SENSO$\}$ — Nell'esemp. $f(x) = \frac{1}{x}$ il

dominio "naturale" è $\{x \neq 0\}$.

Si potrebbe anche considerare $g(x)$ definita da $g(x) = \frac{1}{x}$

definita per $\{x > 0\}$ $\leftarrow$ È UN'ALTRA FUNZIONE.

PER QUANTO CI RIGUARDA:

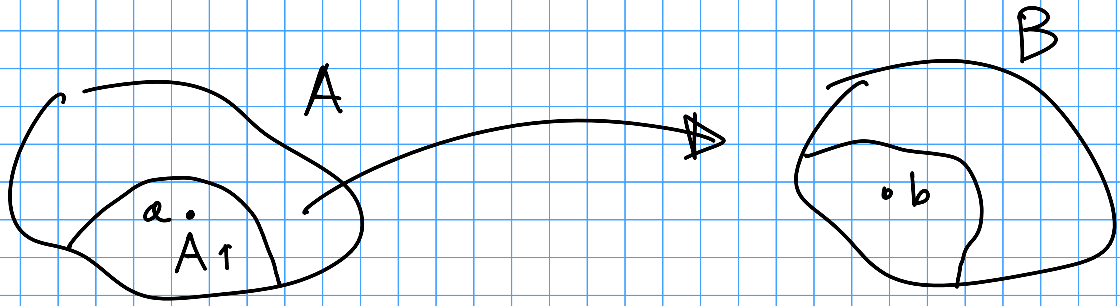
A sottoinsieme dei numeri reali ($\mathbb{R}$)

$B = \mathbb{R}$

DEF. • se $a \in A$ $f(x)$ è il "valore" che f "assume in A"

$f(a)$ si chiama anche "IMMAGINE" di a tramite f.

• Se $A_1 \subset A$



chiamo "IMMAGINE" di A_1 tramite f, l'insieme

$$\{ b : b\in B, \exists\, a \in A_1 \text{ con } f(a) = b \} =: f(A_1)$$

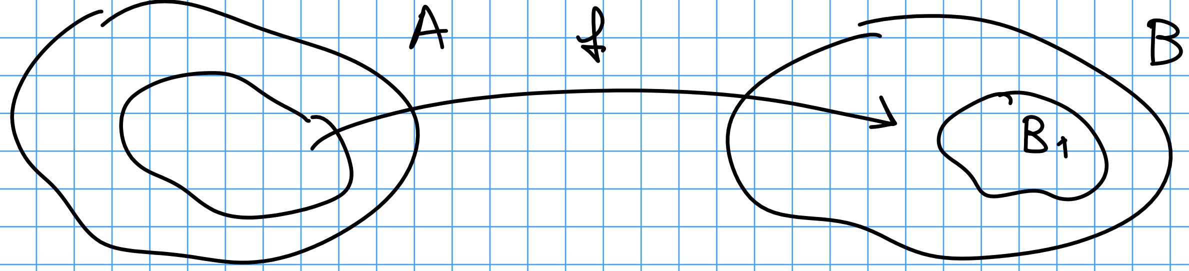
SOTTOINSIEME DI B

$f(A)$ si chiama semplicemente l'IMMAGINE DI f

$$= \{ b : \exists\, a \in A \text{ con } f(a) = b \}$$

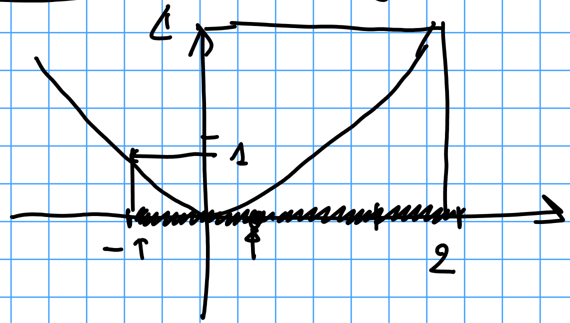
NOTA $f(\{a\}) = \{f(b)\}$

• Dato $B_1 \subset B$, la CONTROIMMAGINE DI B_1 tramite f



è $\{a : a \in A \text{ e } f(a) \in B_1\} =: f^{-1}(B_1)$

ESEMPIO $f(x) = x^2$ $\qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$A = [-1, 2]$

$f(A) = [0, 4]$

- Tutti i numeri y tra 0 e 4 sono quadrati di uno x tra -1 e 2

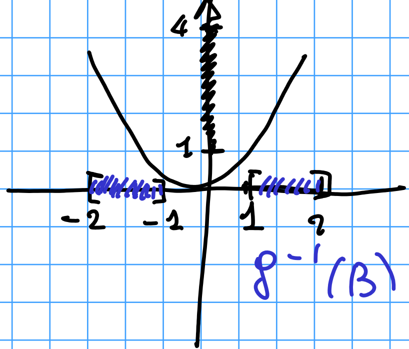
$\forall y \in [0,4] \quad \exists x \in [-1, 2]$ tale che $x^2 = 4$:

dato y prendo $x = \sqrt{y}$, $x \in [0,2] \subset [-1, 2]$

$\Rightarrow [0,4] \subset f([-1,2])$

- viceversa se $x \in [-1, 2] \Rightarrow 0 \le x^2 \le 4$

ESEMPIO Stessa funzione. $\qquad B = [1, 4]$



$$f^{-1}(B) = [-2,-1] \cup [1,2] =: A$$

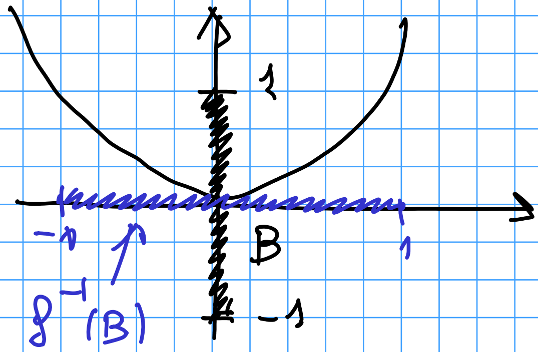
INFATTI se $x \in A \Rightarrow x^2 \in B$

(e quindi $A \subset f^{-1}(B)$)

VICEVERSA se $x^2 \in [1,4] \Rightarrow$

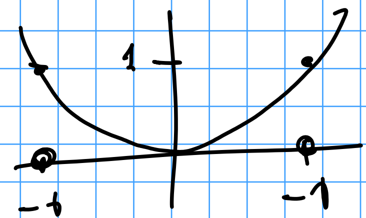
$x \in A$ (se $x>0 \Rightarrow x \in [1,2]$ se $x<0 \Rightarrow x \in [-2,-1]$)

$B = [-1,1]$



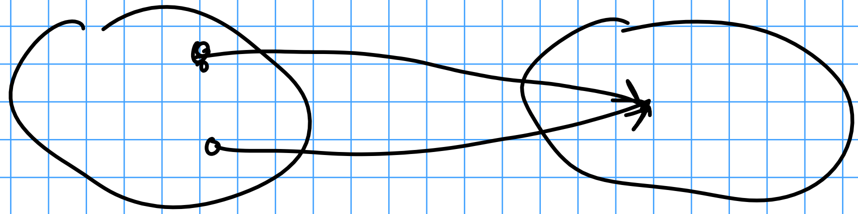
$\Rightarrow f^{-1}(B) = [-1,1]$

$B = \{1\} \Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$

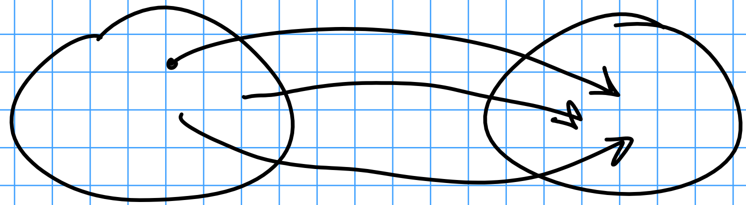


DEF. Dico che f è <u>iniettiva</u> se vale la proprietà:

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$



NON INIETTIVA



INIETTIVA

Dico che f è <u>surgettivo</u> se $f(A) = B$:

$\forall\, b \in B \;\; \exists\, a \in A$ tale che $f(a) = B$

(L'IMMAGINE COINCIDE CON B)

<u>ESEMPI</u> $f(x) = x^2$ se $A = \mathbb{R}$ $B = \mathbb{R}$

NON È NÉ INIETTIVA NÉ SURGETTIVA

- $f(-1) = (-1)^2 = 1$; $f(1) = 1^2 = 1$

DUE PUNTI DISTINTI CON LA STESSA IMMAGINE NON INIETTIVA

- $-1 \notin f(A)$; non c'è nessuno $x \in \mathbb{R}$ con $x^2 = -1$

NON SURGETTIVA

POSSO <u>SOSTITUIRE</u> IL CODOMINIO CON $\{x \geq 0\} = [0, +\infty[$

$\Rightarrow$ la (NUOVA) funzione è surgettiva: VALE INFATTI

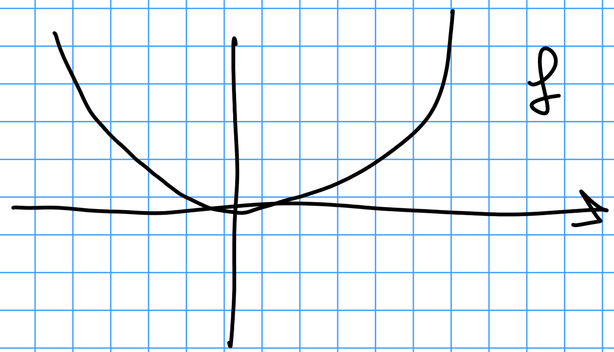
$\forall y \geq 0 \quad \exists\, x \in \mathbb{R}$ con $x^2 = y$ $\leftarrow [0,+\infty[$

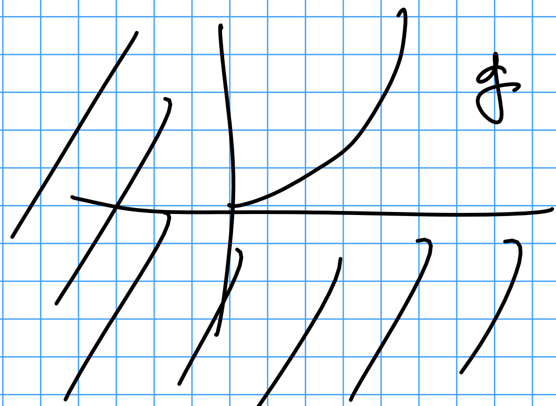
(NON È EVIDENTE — SERVONO LE PROPRIETÀ DI $\mathbb{R}$, CI TORNEREMO SOPRA)

POSSO ANCHE "RESTRINGERE" f ai soli $x \geq 0$. Questa funzione $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, $g(x) = x^2$

è INIETTIVA E SURGETTIVA

Per l'iniettività basta notare che se $x_1 > x_2 \geq 0 \Rightarrow$
$x_1^2 > x_2^2$ DUNQUE $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2$





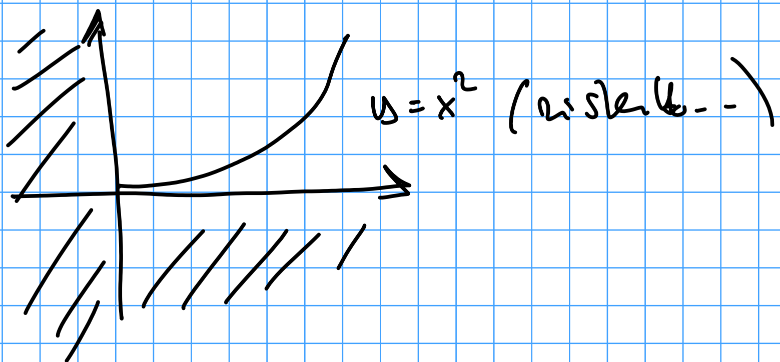
DEF. f si dice invertibile se è contemporaneamente iniettiva e surgettiva. Quando ciò accade posso considerare la

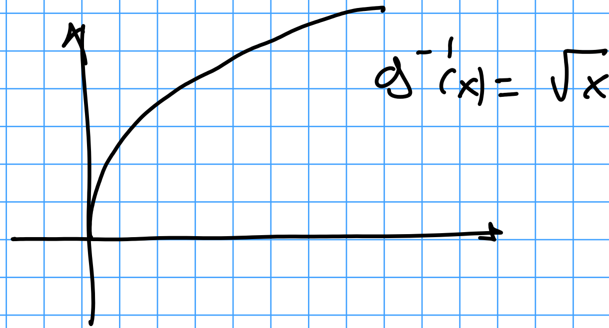
funzione inversa $f^{-1} : B \to A$ tale che

$$x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y$$

In altri termini il valore di f^{-1} in un punto y è uno x per cui $f(x) = y$. Di tali x uno ce n'è (SURGETTIVITÀ) ed è unico (INIETTIVITÀ)

ESEMPIO La radice quadrata è l'inversa della g di prima

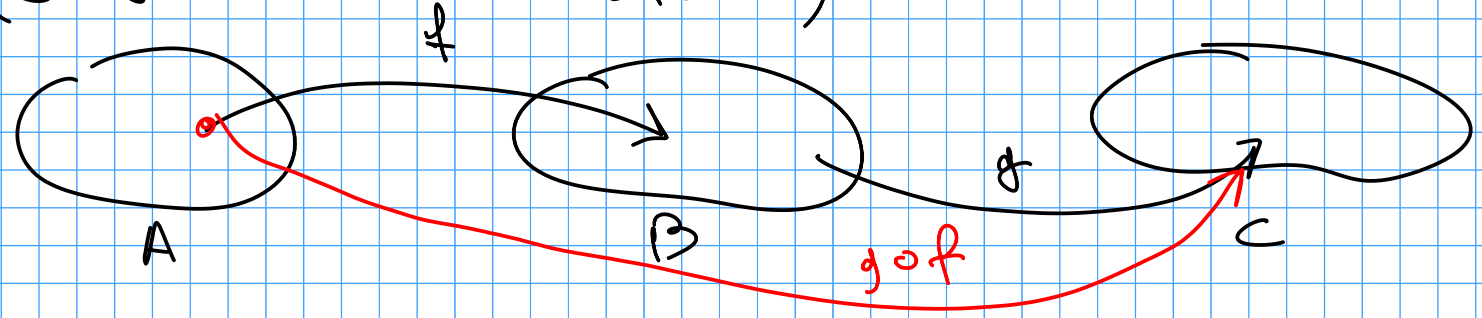




$\sqrt{x}$ è definita, solo per $x \geq 0$, come quell'unico $y \geq 0$ tale che $y^2 = x$ (I NOMI DELLE VARIABILI NON CONTANO)

DEF. Date $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Posso considerare la composizione $g \circ f : A \to C$, definita da

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$



<u>NOTA</u> • $f: A \to B$, $g: B \to A$

$g = f^{-1}$ se e solo se $(f \circ g)(b) = b \quad \forall b \in B$

$(g \circ f)(a) = a \quad \forall a \in A$

(servono tutte due - una non basta)

• IL SIMBOLO $f^{-1}(B_1)$ potrebbe sembrare ambiguo: potrebbe essere

- la controimmagine di B_1 tramite f (HA SEMPRE SENSO)
- l'immagine di B_1 tramite f^{-1} (SE f INVERTIBILE)

INDIVIDUANO LO STESSO INSIEME

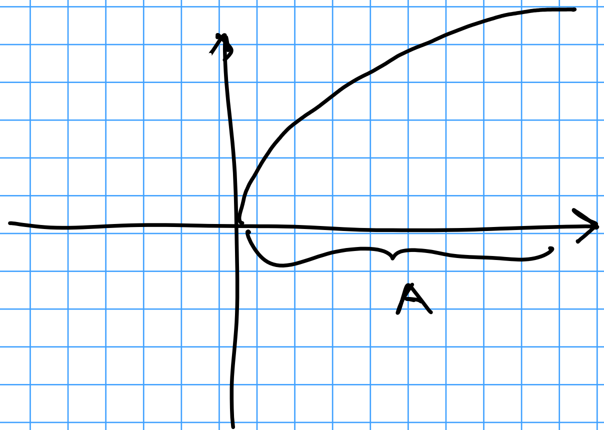
<u>GRAFICO</u> Se $f: A \to B$ il <u>grafico</u> di f è un sottoinsieme del <u>prodotto cartesiano</u> $A \times B$.

$A \times B = \{ (a,b) : a \in A , b \in B \}$

grafico di f $= \{ (a,b) : b = f(a) \}$

Molto spesso si intende, se $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}$

grafico $= \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in A , y = f(x) \}$



$y = \sqrt{x}$

(RICORDIAMO CHE $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si "VISUALIZZA" MEDIANTE IL PIANO CARTESIANO

- f E' INDIVIDUATA DAL SUO GRAFICO. INOLTRE UN INSIEME $G \subset A \times B$ è grafico di qualcosa se e solo se $\forall a \in A$ esiste al più uno $y \in B$ tale che $(x,y) \in G$

<u>ESERCIZIO</u>

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

CONFRONTIAMO LE NOZIONI INTRODOTTE PRIMA CON QUESTA f.

- IL DOMINIO "naturale" è $A = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq -1\}$
- IMMAGINE ?? Bisogna chiedersi quali sono le y per cui $\exists\, x : f(x) = y$ e cioè per quali y si risolve

$$\frac{x}{x+1} = y \qquad (x \neq -1)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = (x+1)y \iff x = xy + y \iff x - xy = y \iff$$

$$x(1-y) = y \Rightarrow \begin{cases} y \neq 1 & x = \dfrac{y}{1-y} \\ y = 1 & \text{IMPOSSIBILE } 0 = 1 \end{cases}$$

DUNQUE $f(A) = \{y \neq 1\}$

- INIETTIVITÀ ? $\underline{\text{SÌ}}$ Perché dal calcolo fatto sopra si vede che ogni $y \neq 1$ ha $\underline{\underline{1}}$ solo controimmagine

$x = \dfrac{y}{1-y}$ (se non fosse iniettiva dovrei trovare $x_1 \neq x_2$ con $f(x_1) = f(x_2) =: \bar{y}$. Tale $\bar{y}$ avrebbe sia x_1, che x_2 come controimmagini)

Si può anche dimostrare direttamente che $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$

$$\frac{x_1}{1+x_1} \neq \frac{x_2}{1+x_2} \iff x_1(1+x_2) \neq x_2(1+x_1) \iff$$

$$x_1 + \cancel{x_1 x_2} \neq x_2 + \cancel{x_1 x_2} \iff x_1 \neq x_2$$

- Se cambio il codominio e prendo $B = \{y \neq 1\}$ allora $f: A \to B$ è invertibile e $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$

DEF. Se $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo di $\mathbb{R}$. f si dice crescente quando $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Invece strettamente crescente se $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

decrescente / strett. decr. . . . . . metto $\leq$ / $<$

VEDIAMO SE $f(x) = \frac{x}{x+1}$ è crescente. Devo vedere

se $x_1 \geq x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_1+1} \geq \frac{x_2}{x_2+1}$.

Si ha: se $x_1 > -1$, $x_2 > -1$

$$\frac{x_1}{x_1+1} \geq \frac{x_2}{x_2+1} \iff x_1(x_2+1) \geq x_2(x_1+1) \iff$$

$$\cancel{x_1 x_2} + x_1 \geq \cancel{x_2 x_1} + x_2 \iff x_1 \geq x_2$$

È CRESCENTE su $]-1, +\infty[$ (strettamente se ragioniamo con $>$ invece di $\geq$)

Se invece $x_1 < -1$, $x_2 < -1$ viene lo stesso risultato:

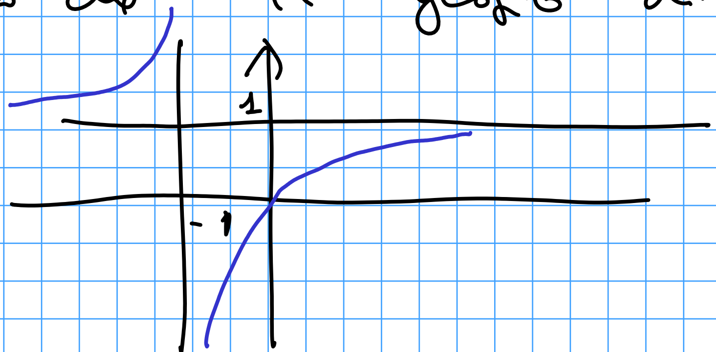
$$\underbrace{\frac{x_1}{x_1+1} > \frac{x_2}{x_2+1}}_{} \iff \frac{x_1(x_2+1)}{x_1+1} < x_2 \iff$$

$$x_1(x_2+1) > x_2(x_1+1)$$

moltiplico per $x_2+1 < 0$

moltiplico per $x_1+1 < 0$

Si scopre che il grafico di f è



ALCUNE PRECISAZIONI SUL MATERIALE DI IERI

QUANTIFICATORI. **IMPORTANTE**: L'ORDINE CONTA

(se ci sono quantificatori diversi)

ESEMPIO (di ieri) $P(x,y)$ = "nel posto x, al tempo y, piove"

SONO DIVERSE LE DUE AFFERMAZIONI

(1) $\forall x \, \exists y \; P(x,y)$ (y dipende da x)

(2) $\exists y \, \forall x \; P(x,y)$ (y va bene per tutte le x)

(1) In ogni posto prima o poi piove

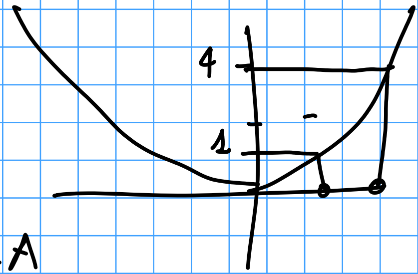
(2) Ci sarà, prima o poi, il diluvio universale

MORALE: "L'ESISTE" DIPENDE DA TUTTO QUELLO CHE C'È PRIMA

ESERCIZIO DI IERI

$$A := \{x : \underbrace{\sqrt{16x^2+9}}_{\geq 0} < \underbrace{8x-3}_{??}\}$$

DOMINIO $= \mathbb{R}$ dato che $16x^2+9 \ge 0 \quad \forall x$



TROVARE A Dato $x \in \mathbb{R}$

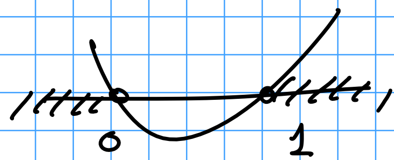
- Se $8x-3<0$ LA DISEGUAGLIANZA È SICURAMENTE FALSA
- Se $8x-3\ge 0$ LA DISEGUAGLIANZA EQUIVALE A

$$\left(\sqrt{16x^2+9}\right)^2 < (8x-3)^2 \iff$$

$$16x^2+\cancel{9} < 64x^2-48x+\cancel{9} \iff$$

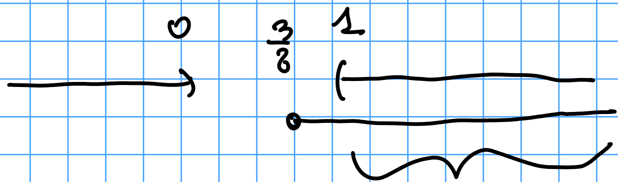
$$48x^2-48x>0 \iff$$

$$x^2-x>0 \iff$$



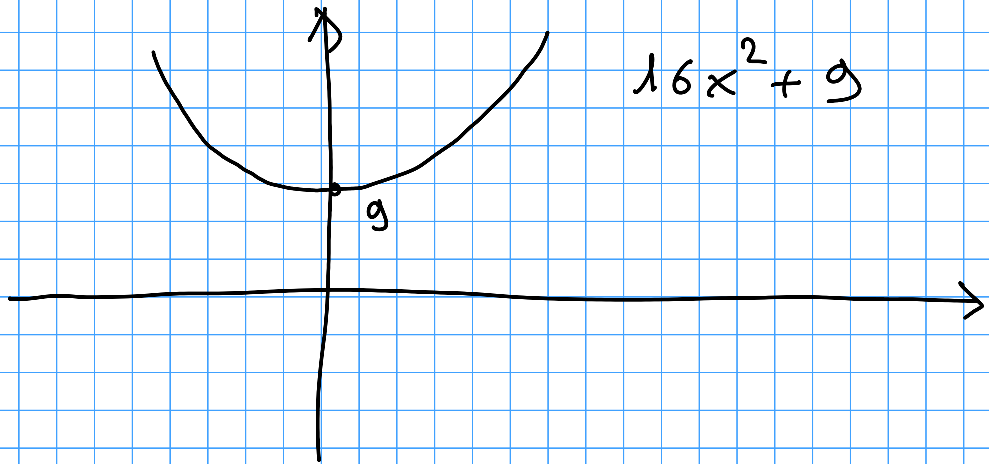
$x<0$ oppure $x>1$

Lo metto a sistema con $8x-3\ge 0 \iff x \ge \frac{3}{8}$

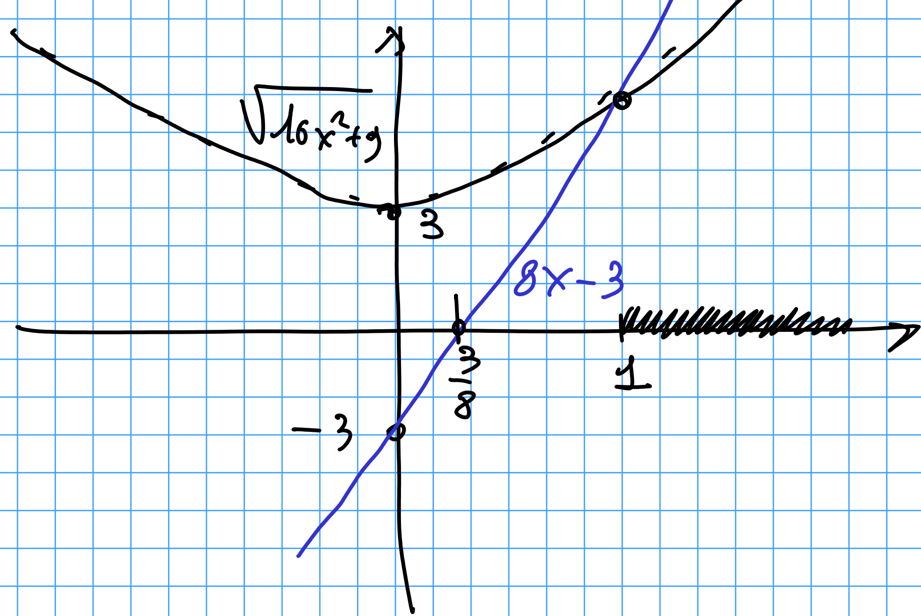


$$\Rightarrow \boxed{x>1}$$

Rappresentazione grafica (più o meno)



$\Rightarrow$



I NUMERI .... CI SONO

(1) I NUMERI NATURALI (li indico con $\mathbb{N}$)

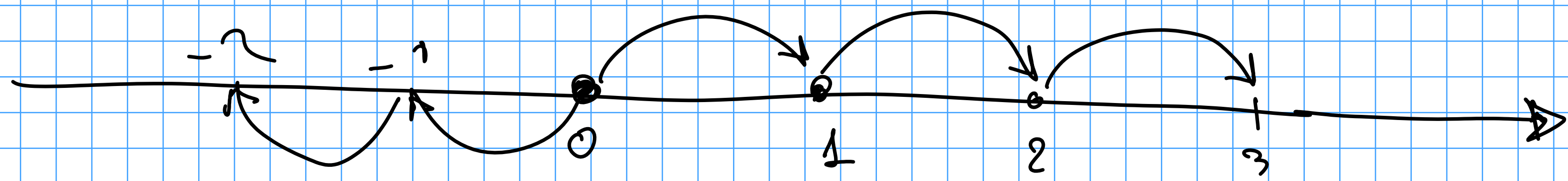
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

(2) GLI INTERI RELATIVI $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

(3) I RAZIONALI $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \}$

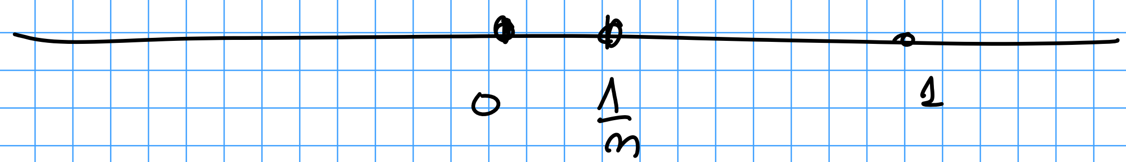
$\mathbb{Q}$ NON È $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ perché $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

C'È UNA CORRISPONDENZA TRA $\mathbb{Q}$ e i punti della retta: Prendo la retta. Fisso l'origine O, un verso e

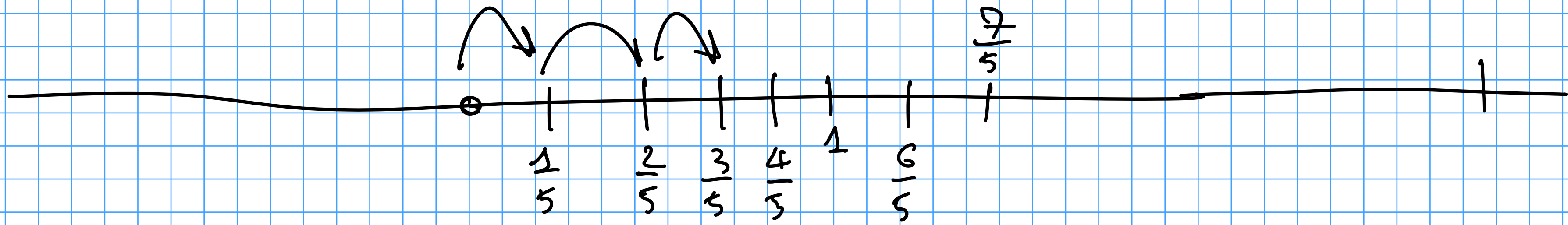


l'unità di misura (fisso un punto che chiamo 1)

- Per ogni intero naturale trovo un punto sulla retta (mettendo in fila n copie dell'unità di misura, nel verso positivo)
- stesso discorso per gli interi negativi (andando in senso opposto al verso positivo)
- Se $n > 0$ associo a $\frac{1}{n}$ il segmento che parte da O tale che, preso n volte, va a finire in 1



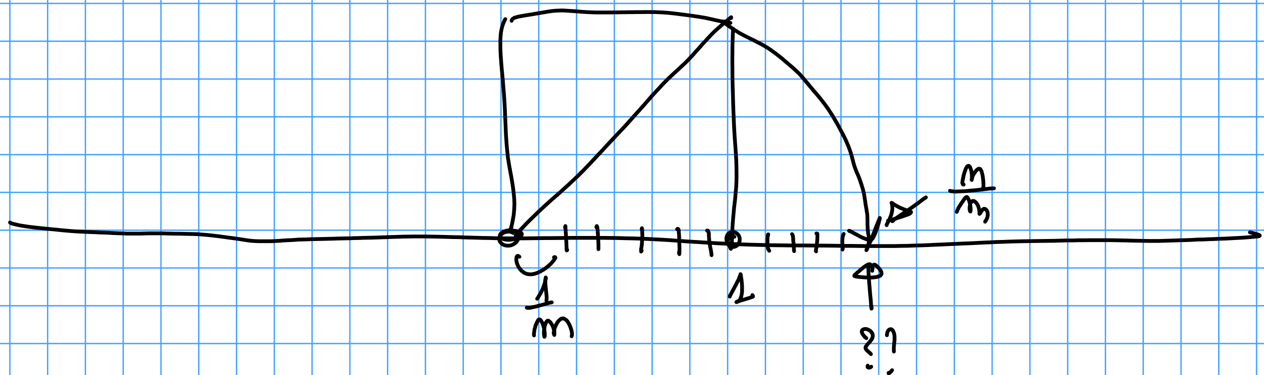
Se $m > 0$, $n > 0$ il numero $\frac{m}{n}$ è ottenuto prendendo m volte il segmento $\frac{1}{n}$



(stesso discorso per i razionali < 0)

HO UNA CORRISPONDENZA DA $\mathbb{Q} \xrightarrow{f}$ RETTA

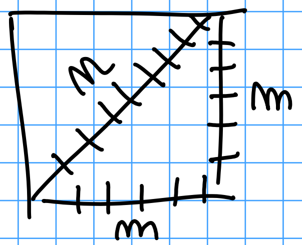
<u>PROBLEMA</u> CI SONO PUNTI DELLA RETTA CHE NON SONO DESCRITTI DA f (f <u>NON</u> È SURGETTIVA)



LA DIAGONALE DEL QUADRATO UNITARIO NON HA COORDINATE RAZIONALI: NON È POSSIBILE DIVIDERE IL LATO IN m PARTI EGUALI IN MODO CHE

UN MULTIPLO INTERO m DI TALI PARTI DIA (ESATTAM.) LA DIAGONALE (lato e diagonale sono "INCOMMENSURABILI")

INFATTI SE FOSSERO COMMENSURABILI TROVEREI $n, m \in \mathbb{N}$



$$\Rightarrow \quad m^2 + m^2 = n^2 \iff \boxed{n^2 = 2m^2}$$

POSSO SUPPORRE n e m primi tra loro

SE COSÌ FOSSE $\underline{n^2 \text{ PARI}}$

$\Rightarrow$ n PARI (n DISPARI $\Rightarrow$ n^2 DISPARI)

$\Rightarrow$ $n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2$ DA CUI

$4k^2 = 2m^2 \Rightarrow m^2 = 2k^2 \Rightarrow m$ PARI ASSURDO

- I NUMERI REALI $\mathbb{R}$ sono un "insieme di numeri" che contengono $\mathbb{Q}$ ma descrivono la retta (potrei pensare ai numeri reali come allineamenti decimali infiniti - senza regole di periodicità)

NOI considereremo i reali mediante un punto di vista ASSIOMATICO

DICENDO che i reali sono un insieme $\mathbb{R}$ con certe proprietà

CI FORNIAMO

- CI SONO LE OPERAZIONI $+$ e $\cdot$ (con le proprietà ...)
- C'È L'ORDINE (il $\geq$ con varie proprietà ...)
- $\mathbb{R}$ NON HA BUCHI (è in corrispondenza biunivoca con la retta)

ESERCIZI

1) Sia $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

(a) Trovare l'immagine di f.

(b) Vedere se f è iniettiva su $\mathbb{R}$ o se è iniettiva su $[0,+\infty[$

(c) Invertire f ristretta a $[0,+\infty[$

2) Caratterizzare l'insieme

$$\{x : \sqrt{16x^2+9} < 8x-3\}$$