# Analisi Matematica I

## prof. Claudio Saccon (*)

Prima lezione, 28 settembre 2012

(*) Dipartimento di Matematica
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

## INFORMAZIONI UTILI

PROGRAMMA: reperibile sul sito del docente a

http://saccon.blog.dma.unipi.it/informazioni-sul-corso-di-analisi-uno/

LIBRO (consigliato, ma vanno bene anche altri equivalenti):

M.Bramanti, C.D.Pagani, S. Salsa
Analisi Matematica 1, ZANICHELLI

Verranno anche fornite delle NOTE SCARICABILI dal sito del docente, relativamente ad alcuni argomenti non coperti interamente dal libro (serie di potenze, equazioni differenziali).

LIBRO DI ESERCIZI: Uno qualunque tra quelli in commercio - anche in questo caso è possibile scaricare dal sito esercizi e i compiti d'esame degli anni passati.

MODALITA' DELL'ESAME: L'esame prevede uno SCRITTO e un ORALE.
Durante l'anno verranno tenute DUE prove intermedie ("COMPITINI"),
il superamento delle quali consente di non fare la prova scritta.
Ci saranno anche dei meccanismi che permetteranno di usare solo
uno dei compitini (in caso che l'altro non sia stato sufficiente):
per i dettagli VEDERE SUL SITO le modalità dell'esame.

QUESTE SLIDES compariranno anch'esse sul sito,

http://saccon.blog.dma.unipi.it

alla voce "Lezioni di Analisi uno 2012/13", nei giorni successivi alle
lezioni.

Ogni lunedì dalle 8.30 (salvo avviso contrario) c'è un RICEVIMENTO
(presso l'ufficio del docente all'ex Dipartimento di Matematica Applicata,
Via Buonarroti 1/c)

# ARGOMENTI DEL CORSO

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE:

- Numeri reali (numeri interi e numeri razionali)
- Limite di funzioni e di successioni
- Continuità
- Derivate e calcolo differenziale
- Integrali e calcolo integrale
- Serie numeriche e (alcune) serie di funzioni
- Equazioni differenziali (verranno riprese in Analisi II)

# NOZIONI DI INSIEME / FUNZIONE

**INSIEME** "COLLEZIONE DI OGGETTI"

$\downarrow$

elementi

CONOSCERE UN INSIEME $A$ $\Longleftrightarrow$ conoscere tutti gli elementi di $A$

$\Updownarrow$

avere una "regola" che mi dice se un elemento appartiene oppure no ad $A$

**NOTA** È necessario fissare un ambiente "di lavoro" in cui si trovano gli elementi: l'universo $\mathcal{U}$

---

Se $a$ è un elemento e $A$ è un insieme

$a \in A$ $\leftarrow$ "$a$ appartiene ad $A$"

---

COME DEFINISCO UN INSIEME? Due modi

(1) faccio la lista degli elementi (e la metto tra parentesi graffe) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(2) Scrivendo la regola che individua tutti e soli gli elementi di A: cioè dando una proprietà $P(x)$, cioè un'affermazione dipendente da una variabile $x$, che – a seconda di $x$ – può essere VERA o FALSA. (Esempio $P(x) =$ "$x$ è un numero pari": $P(1)$ è falso; $P(2)$ è vero ...)

Dato $P(x)$ si può definire l'insieme

$$A := \{ x : P(x) \}$$

che è l'insieme di tutti gli elementi $x$ per cui $P(x)$ è vera. (l'universo è sottinteso)

ESEMPIO $A := \{1, 3, 5, 7, 9\}$ si può anche introdurre ponendo $A := \{ x :$ "$x$ è dispari" E "$x < 10$" $\}$

OSS. $A = B$ significa che $A$ e $B$ hanno gli stessi elementi

DEF. • Dico che è "SOTTOINSIEME" di $B$

$A \subset B$ (vale anche se $A = B$)

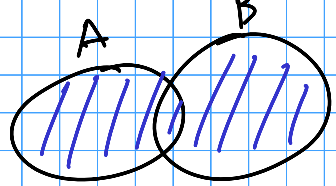
se ogni elemento di $A$ è anche elemento di $B$

( si trova anche la scrittura $\subseteq$ )

OSS. $A = B$ se e solo se $(A \subset B)$ e $(B \subset A)$

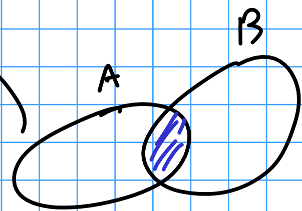
• Dati $A$ e $B$ si considerano

$A \cup B$ ($A$ unito $B$)



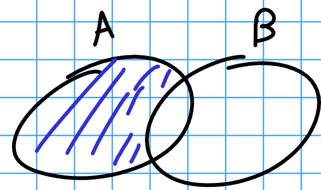

$:= \{x : (x \in A) \text{ oppure } (x \in B)\}$

$A \cap B$ ($A$ intersecato $B$)



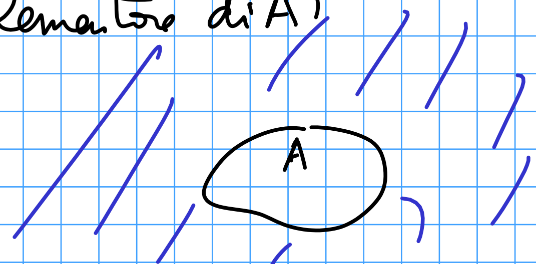

$:= \{x : (x \in A) \text{ e } (x \in B)\}$

$A \setminus B$ ($A$ meno $B$)




$:= \{x : (x \in A) \text{ e } (x \notin B)\}$

$\complement A$ (oppure $A^c$) (complementare di $A$)



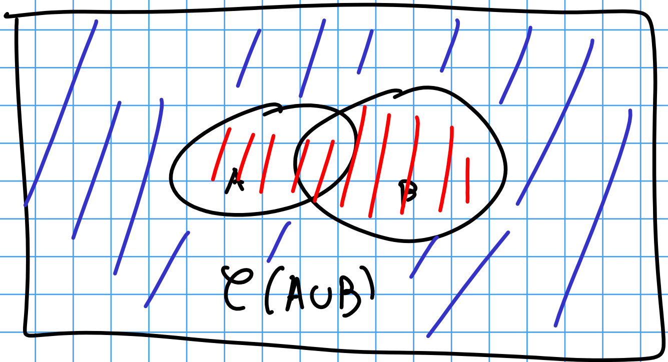

$\complement A := \{x : x \notin A\}$

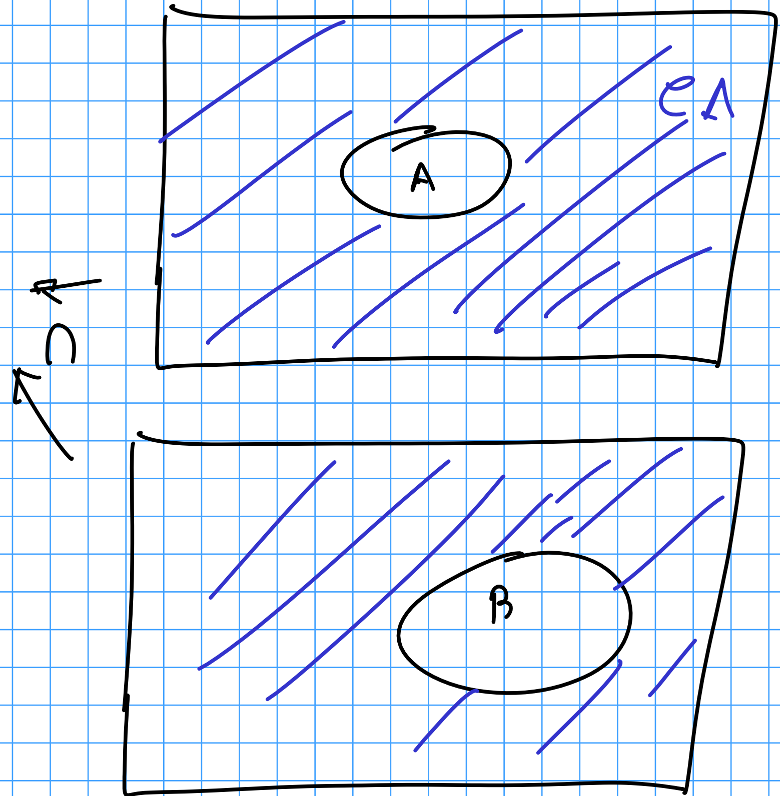
OSS. $A \setminus B = A \cap \complement B$ (si vede facilmente)

# LEGGI DI DE MORGAN

(1) $\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B)$

(2) $\complement(A \cap B) = (\complement A) \cup (\complement B)$




$\mathcal{U} = \{\text{INTERI}\}$

**ESEMPIO**

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x : \text{"}x \text{ è dispari" e "} x < 10\text{"}\}$

$= \{x : x \text{ DISPARI}\} \cap \{x : x < 10\}$

$\complement A = \{x \text{ PARI}\} \cup \{x \geq 10\}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

---

QUANTIFICATORI

- $P(x)$ proprietà dipende da $x$

$P(1)$ è una "AFFERMAZIONE" (che è o VERA o FALSA).

$P(x) =$ " $x$ è pari "

- Posso anche avere $Q(x, y)$ (che dipende da due variabili). Per esempio $P(x, y) =$ " $x \geq y$ "

$Q(1, 2)$ è falso; $Q(2, 2)$ vero

Allora posso considerare $Q(1, y)$

è una proprietà con UNA variabile

- Posso anche considerare le due proprietà:

$\forall x \; P(x)$ / $\forall x \; Q(x, y)$

$\exists x \; P(x)$ / $\exists x \; Q(x, y)$

↑ AFFERMAZIONI

↑ PROPRIETÀ DIPENDENTI DA UNA VAR. ($y$)

$\forall x\, P(x)$ = "OGNI NUMERO È PARI" (FALSA)

$\exists x\, P(x)$ = "C'È ALMENO UN NUMERO PARI" (VERA)

① $\forall x\, Q(x,y)$ = $y$ è più piccolo di qualunque numero

② $\exists x\, Q(x,y)$ = c'è un numero più grande di $y$

SE SIAMO NEI NUMERI NATURALI $\forall x\, Q(x,0)$ VERA
mentre $\forall x\, Q(x,y)$ è falso se $y \geq 1$

Per quanto riguarda ② questo è vero per qualunque $y$ intero

---

FATTI

$$\text{NON}\left(\forall x\, P(x)\right) \iff \exists x\ \text{NON}\ P(x)$$

$$\text{NON}\left(\exists x\, P(x)\right) \iff \forall x\ \text{NON}\ P(x)$$

Con i quantificatori ($\forall$ e $\exists$) si possono costruire "affermazioni" complicate. Prendiamo per es.

$$P(x,y) = \text{"nel luogo } x \text{ al tempo } y \text{ piove"}$$

(A) $\forall x \, \forall y \; P(x,y)$ $\rightarrow$ PIOVE SEMPRE, DAPPERTUTTO

(B) $\exists x \; \forall y : P(x,y)$ $\rightarrow$ c'è un posto in cui piove sempre

(C) $\forall x \; \exists y \; P(x,y)$ $\rightarrow$ ovunque si vada, prima o poi piove.

(D) $\exists x \; \exists y \; P(x,y)$ $\rightarrow$ c'è un luogo in cui talvolta piove

COME SI NEGANO?

(A) $\forall x \left( \underbrace{\forall y \; P(x,y)}_{\text{DIPENDE DA } x} \right)$ NEGHIAMOLA!

$$\text{NON-}\forall x \left( \forall y \; P(x,y) \right) = \exists x \; \text{NON} \left( \forall y \; P(x,y) \right) =$$

$$\exists x \; \exists y \; \text{NON } P(x,y)$$

NEGAZIONE DI (A): c'è un luogo e un tempo in cui non piove

OGNI VOLTA CHE LA NEGAZIONE "SCAVALCA" UN QUANTIFICATORE, QUESTO "SI INVERTE"

(B) $\exists x \ \forall y \ P(x,y)$ NEGAZIONE:

$\text{NON}\left(\exists x \left(\forall y \ P(x,y)\right)\right) = \forall x \ \text{NON}\left(\forall y \ P(x,y)\right) =$

$\forall x \ \exists y : \text{NON} \ P(x,y)$ CIOÈ: IN OGNI LUOGO C'È UN MOMENTO IN CUI NON PIOVE

(C)
(D) ← PROVATE A NEGARLE

---

L'uso dei quantificatori permette di definire insiemi "complicati"

$A := \{ x : \ y^2 > x \ \ \forall y \} =$ (x,y variano nei reali)

(dato che ogni numero $z \geq 0$ si può scrivere come un quadrato)

$\{ x : \ x < z \text{ per ogni } z \geq 0 \} = \{ x : x < 0 \}$

INFATTI:

(1) se $X<0 \Rightarrow X < y^2 \quad \forall y$ reali

(2) se $X \geq 0 \Rightarrow$ trovo un $y$ : $y^2 \leq X$

(per es. $y=0$)

LA (1) DICE che $\{x<0\} \subset A$

LA (2) DICE che $\complement\{x<0\} \subset \complement A \quad (A \subset \{x \geq 0\})$

<u>OSS.</u> $A \subset B \iff \complement B \subset \complement A$

<u>ESERCIZIO</u> Caratterizzare:

Ambiente $= \mathbb{R}$

(numeri reali)

$$A := \{ X : \sqrt{x^2+x-2} > X \}$$

SOTTINTESO $\left(\sqrt{x^2+x-2} \text{ è definito}\right)$ E...

$$A := \{ X : (x^2+x-2 \geq 0) \text{ E } \sqrt{x^2+x-2} > x \}$$ (più correttamente)

- ESAMINIAMO $X^2+X-2 \geq 0$

$$\Delta = 1+8 = 9 \Rightarrow \text{RADICI } \; x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array} \right.$$

$$\{x : x^2 + x - 2 \geq 0\} = \{x \leq -2\} \cup \{x \geq 1\}$$
$$= ]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[ \;=: B$$

dove ha senso la diseq.

- NELL' INSIEME $B$ considero la disequazione

$$\sqrt{x^2 + x - 2} > x$$

QUESTA È VERA SE:

- $x < 0$
- $x \geq 0$ E $x^2 + x - 2 > x^2$, cioè $x > 2$

METTENDO TUTTO INSIEME TROVIAMO

$$]-\infty, -2] \cup ]2, +\infty[ \;= \{x \leq -2\} \cup \{x > 2\}$$

---

ESERCIZIO: Caratterizzare l'insieme

$$A := \{x : \sqrt{16x^2 + 9} < 8x - 3\}$$

---

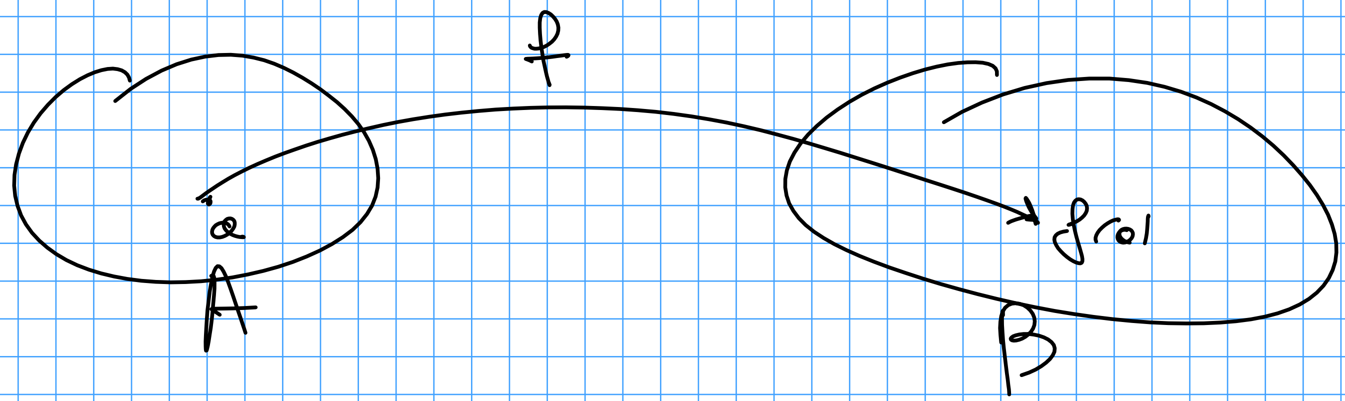
**FUNZIONI**

Una funzione $f$, definita

su un insieme $A$, a valori in un insieme $B$
( si scrive $f : A \to B$)
è una "corrispondenza" che a ogni elemento $a$ dell'insieme $A$ associa un elemento $f(a)$ in $B$

$a$ = punto in cui si applica $f$ ($a$ <u>argomento</u> di $f$)

$f(a)$ = <u>valore</u> che $f$ assume in $a$
o il <u>risultato</u> dell'applicazione di $f$ ad $a$




$f$ assume in $a$ il valore $f(a)$

La funzione "quadrato" assume il valore 4 nel punto 2 !!

Dal punto di vista formale è errato dire "la funzione $x^2$" Dovrei dire: la funzione $f$ tale che $f(x) = x^2$.

ATTENZIONE: LA DEF. di una funzione CONTIENE TRE COSE

- L'INSIEME DI PARTENZA $A$ (DOMINIO)
- L'INSIEME DI ARRIVO $B$ (CODOMINIO)
- LA regola che permette di calcolare $f$

# ESERCIZI

1) Sia $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

(a) Trovare l'immagine di $f$.

(b) Vedere se $f$ è iniettiva su $\mathbb{R}$ o se è iniettiva su $[0,+\infty[$

(c) Invertire $f$ ristretta a $[0,+\infty[$

2) Caratterizzare l'insieme

$$\{x : \sqrt{16x^2+9} < 8x-3\}$$